Упражнения по гомологической алгебре к 10 апреля

1. Напомним, что если $f: X \to Y$ — замкнутое вложение, то $f^!$ является (производным) функтором сечений с носителем на $X$ (см. задачу 7 к 20 марта). Докажите, что $f^!\mathcal{F} = R\mathcal{H}om(\underline{\mathbf{R}}_X, \mathcal{F})$. Мы называем $R\Gamma(X, f^!\mathcal{F})$ *когомологиями* $\mathcal{F}$ *с носителями в* $X$ и обозначаем их $H^\bullet_X(Y, \mathcal{F})$. Докажите, что $H^\bullet_X(Y, \mathcal{F}) = R^\bullet Hom(\underline{\mathbf{R}}_X, \mathcal{F})$. В частности, композиция $RHom$ задает умножение $H^k_X(Y, \underline{\mathbf{R}}_Y) \times H^l(Y, \underline{\mathbf{R}}_Y) \to H^{k+l}_X(Y, \underline{\mathbf{R}}_Y)$ (т.е. обычные когомологии действуют на когомологиях с носителем).

2. Пусть $f: X \to Y$ — гладкое расслоение (т.е. дифференциал $df$ сюръективен в каждой точке) относительной размерности $n$. Докажите, что $f^!\underline{\mathbf{R}}_Y = \omega_{X/Y}[n]$ для некоторой одномерной локальной системы $\omega_{X/Y}$ на $X$. Пусть все слои $f$ являются сферами (*сферическое расслоение*). Постройте выделенные треугольники $\ldots \to R^0 f_*\underline{\mathbf{R}}_X \to Rf_*\underline{\mathbf{R}}_X \to R^n f_*\underline{\mathbf{R}}_X[-n] \to R^0 f_*\underline{\mathbf{R}}_X[1] \to \ldots$ и $\ldots \to \underline{\mathbf{R}}_Y \to Rf_*\underline{\mathbf{R}}_X \to R^0 f_*\omega_{X/Y}[-n] \to \underline{\mathbf{R}}_Y[1] \to \ldots$

3. Пусть $f: E \to Z$ — *ориентированное* $n$-мерное векторное расслоение (т.е. на каждом слое задана ориентация, непрерывно зависящая от слоя). Докажите, что $\omega_{E/Z} = \underline{\mathbf{R}}_E$, а $s^!\underline{\mathbf{R}}_E = \underline{\mathbf{R}}_Z[-n]$, где $s: Z \to E$ — нулевое сечение.

4. В условиях предыдущей задачи постройте изоморфизм $H^0(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z) \simeq H^n_Z(E, \underline{\mathbf{R}}_E)$. Образ $1 \in H^0(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z)$ в правой части называется *классом Тома* $t(E) \in H^n_Z(E, \underline{\mathbf{R}}_E)$. Докажите, что умножение на класс Тома (см. задачу 1) задает *изоморфизм Тома* $H^k(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z) = H^k(E, \underline{\mathbf{R}}_E) \simeq H^{k+n}_Z(E, \underline{\mathbf{R}}_E)$.

5. Постройте изоморфизмы $Rf_!\underline{\mathbf{R}}_E \simeq \underline{\mathbf{R}}_Z[-n]$ и $Rf_*\underline{\mathbf{R}}_E \simeq \underline{\mathbf{R}}_Z$. Значит, естественное отображение $Rf_!\underline{\mathbf{R}}_E \to Rf_*\underline{\mathbf{R}}_E$ задает морфизм $\underline{\mathbf{R}}_Z[-n] \to \underline{\mathbf{R}}_Z$. Применяя $\Gamma(Z, ?)$, получаем отображение $\mathbf{R} = H^0(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z) \to H^n(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z)$. Образ $1 \in H^0(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z)$ в правой части называется *классом Эйлера* $e(E) \in H^n(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z)$. Докажите, что $e(E)$ является образом $t(E)$ при отображении $H^n_Z(E, \underline{\mathbf{R}}_E) \to H^n(E, \underline{\mathbf{R}}_E) = H^n(Z, \underline{\mathbf{R}}_Z)$.

6. Пусть $f: X \to Y$ — вложение гладкого подмногообразия, причем $f^!\underline{\mathbf{R}}_Y \simeq \underline{\mathbf{R}}_X[-n]$ (это означает, что нормальное расслоение $T_X Y$ ориентировано размерности $n$). Постройте длинную точную последовательность

$$\ldots \to H^k(X, \underline{\mathbf{R}}_X) \xrightarrow{\gamma} H^{k+n}(Y, \underline{\mathbf{R}}_Y) \to H^{k+n}(Y - X, \underline{\mathbf{R}}_{Y-X}) \to H^{k+1}(X, \underline{\mathbf{R}}_X) \to \ldots$$

Отображение $\gamma$ называется *отображением Гизина*, а $\gamma(1) \in H^n(Y, \underline{\mathbf{R}}_Y)$ называется *классом Эйлера*.

7. а) Пусть ориентированное векторное расслоение $f: E \to Z$ имеет непрерывное сечение, нигде не равное нулю. Докажите, что $e(E) = 0$;

б) Пусть $Z = \mathbf{CP}^1$, а $E = \mathcal{O}(k)$. Вычислите $e(E)$.

8. а) Пусть $g: Z' \to Z$, и $E' := g^*E$ — векторное расслоение над $Z'$. Докажите, что $e(E') = g^*e(E)$;

б) Пусть $E, E'$ — ориентированные векторные расслоения над $Z$. Докажите, что $e(E \oplus E') = e(E)e(E')$.

9. Пусть $E \to Z$ — $n$-мерное *комплексное* векторное расслоение. Докажите, что $c_n(E) = e(E)$. *Указание:* В силу предыдущей задачи достаточно ограничиться случаем $Z = \mathbf{BU}(n), E$ — универсальное расслоение. В силу принципа расщепления достаточно теперь рассмотреть случай $Z = \mathbf{CP}^\infty \times \ldots \times \mathbf{CP}^\infty, E = \mathcal{O}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(1)$. Остается применить задачи 7,8.