Упражнения по гомологической алгебре к 24 апреля

Напомним, что для локально компактного X *дуализирующий комплекс* $\mathcal{D}_X$ определяется как $f^!\mathbf{R}$ (где f — проекция из X в точку). Для открытого $U \subset X$ имеем $R\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = (R\Gamma_c(U, \underline{\mathbf{R}}))^*$.

1. Пусть X_n есть объединение координатных гиперплоскостей в n-мерном аффинном комплексном пространстве. Вычислите все слои $\mathcal{D}_{X_n}$ для а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) произвольного n.

2. Пусть Q_n есть множество решений уравнения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ в $n+1$-мерном комплексном аффинном пространстве. Точка 0 — единственная особая точка Q_n. Вычислите слой $\mathcal{D}_{Q_n}$ в точке 0 для а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) произвольного n.

3. Пусть теперь поле коэффициентов равно $\mathbf{F}_2$ (т.е. $\mathcal{D}_X$ определеяется как $f^!\mathbf{F}_2$). Решите предыдущую задачу в этом предположении.

4. Пусть $X = \mathbf{R}^1 \supset Z = \{n^{-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ и $\hat{Z} = Z \cup 0$. Положим $\mathcal{F} = \underline{\mathbf{R}}_Z$, $\mathcal{G} = \underline{\mathbf{R}}_{\hat{Z}}$.

а) Найдите $\mathcal{DF}, \mathcal{DDF}$ и убедитесь, что $\mathcal{DDF} \neq \mathcal{F}$;

б) Докажите, что $\mathcal{G}$ мягкий и $H^1_{\{0\}}(X, \mathcal{G})$ бесконечномерно.

5. Пусть X, Y — многообразия; p_1, p_2 — проекции $X \times Y$ на X и на Y. Пусть $\mathcal{F} \in D^b(X)$, $\mathcal{G} \in D^+(Y)$ — конструктивные комплексы. Постройте изоморфизм $p_1^*\mathcal{DF} \otimes p_2^*\mathcal{G} \simeq R\mathcal{H}om(p_1^*\mathcal{F}, p_2^!\mathcal{G})$.

6. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ — конструктивные комплексы на X. Постройте изоморфизмы $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq R\mathcal{H}om(\mathcal{DG}, \mathcal{DF}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{F})$.