Упражнения по гомологической алгебре к 31 апреля

Этот листочек посвящен алгебраическим основам *исчисления Шуберта*, т.е. правилам вычисления индекса пересечения циклов Шуберта на пространстве флагов $\mathcal{B} = G/B$. Стандартные обозначения: $\Delta \subset R^+ \subset R \subset \mathfrak{h}^*$ — простые (соотв. положительные, соотв. все) корни в двойственном пространстве к картановской подалгебре; $\check{R} \subset \mathfrak{h}$ — двойственная система корней ($R \ni \gamma \leftrightarrow \check{\gamma} \in \check{R}$); $I \subset S^\bullet \mathfrak{h}^*$ — идеал, порожденный W-инвариантными элементами положительной степени; $\mathcal{H} := S^\bullet \mathfrak{h}^*/I = H^{2\bullet}(\mathcal{B})$; для положительного корня $\gamma \in R^+$ соответствующее отражение обозначается $s_\gamma \in W$; длиннейший элемент группы Вейля обозначается w_0, $l(w_0) =: \nu$. Наконец, мы пишем $y \xrightarrow{\gamma} w$, если $s_\gamma y = w$ и $l(w) = l(y) + 1$; мы пишем $y < w$, если найдется цепочка $y = x_1 \xrightarrow{\gamma_1} x_2 \ldots \xrightarrow{\gamma_k} x_{k+1} = w$.

1. Пусть $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$ — кратчайшее разложение в простые отражения ($\alpha_i \in \Delta$); положим $\gamma_i = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$. Докажите, что

а) Корни $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ различны и составляют множество $R^+ \cap wR^-$;

б) Если $\gamma \in R^+ \cap wR^-$, то для некоторого $i \leq l$ имеем $s_\gamma s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_i} = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_{i-1}}$;

в) Для произвольных $w \in W, \gamma \in R^+$ имеем $l(w) < l(s_\gamma w) \Leftrightarrow w^{-1}\gamma \in R^+$.

2. Пусть $y, w \in W$, $\Delta \ni \alpha \neq \gamma \in R^+$, $\beta = s_\alpha \gamma$.

Докажите, что $w \xleftarrow{\gamma} s_\alpha y \xrightarrow{\alpha} y \;\Leftrightarrow\; y \xrightarrow{\beta} s_\alpha w \xleftarrow{\alpha} w$.

3. Пусть $w < y \in W$, $\alpha \in \Delta$. Докажите, что

а) Либо $s_\alpha w \leq y$, либо $s_\alpha w < s_\alpha y$;

б) Либо $w \leq s_\alpha y$, либо $s_\alpha w < s_\alpha y$;

в) Если $w_1 \xrightarrow{\alpha} y_1$, $w_2 \xrightarrow{\alpha} y_2$ и один из w_1, y_1 меньше одного из w_2, y_2, то $w_1 \leq w_2 < y_2$ и $w_1 < y_1 \leq y_2$.

4. Предположим, на W задан частичный порядок $\preceq$ со следующими свойствами:

а) Если $\alpha \in \Delta$, $w \in W$ и $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$, то $w \preceq s_\alpha w$;

б) Если $w \preceq y$, то либо $s_\alpha w \preceq y$, либо $s_\alpha w \preceq s_\alpha y$.

Докажите, что $w \preceq y \;\Leftrightarrow\; w \leq y$.

5. Пусть $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$ — кратчайшее разложение $w \in W$. Докажите, что

а) Если $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq l$ и $y = s_{\alpha_{i_1}} \ldots s_{\alpha_{i_k}}$, то $y \leq w$;

б) Если $y \leq w$, то y можно представить в виде $y = s_{\alpha_{i_1}} \ldots s_{\alpha_{i_k}}$ для некоторых $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq l$;

в) Если $y \to w$, то существует единственный индекс i, $1 \leq i \leq l$, такой что $y = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i+1}} \ldots s_{\alpha_l}$.

6. Пусть $\gamma \in R$. Заметим, что отражение s_γ действует на $\mathfrak{h}^*$ и, соответственно на алгебре полиномов $S^\bullet \mathfrak{h}^*$. Определим оператор $A_\gamma : S^\bullet \mathfrak{h}^* \to S^\bullet \mathfrak{h}^*$ формулой $A_\gamma f = \frac{f - s_\gamma f}{\gamma}$. Докажите, что

а) $A_{-\gamma} = -A_\gamma$, $A_\gamma^2 = 0$; б) $w A_\gamma w^{-1} = A_{w\gamma}$; в) $s_\gamma A_\gamma = -A_\gamma s_\gamma = A_\gamma$, $s_\gamma = -\gamma A_\gamma + 1 = A_\gamma \gamma - 1$; г) $A_\gamma f = 0 \;\Leftrightarrow\; s_\gamma f = f$; д) $A_\gamma I \subset I (\Rightarrow$ определен оператор A_γ на $\mathcal{H}$); е) Для $\chi \in \mathfrak{h}^*$, обозначая той же буквой оператор умножения на χ, имеем $[A_\gamma, \chi] = \chi(\check{\gamma}) s_\gamma$.

7. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \Delta$, $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$.

а) Докажите, что если $l(w) < l$, то $A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_l} = 0$.

Положим $A_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)} := A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_l}$ и $B_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)} := s_{\alpha_l} \ldots s_{\alpha_1} A_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)}$. Наконец, положим $w_i = s_{\alpha_l} \ldots s_{\alpha_i}$. Докажите, что б) $B_{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)} = w_2 A_{\alpha_1} w_2^{-1} w_3 A_{\alpha_2} w_3^{-1} \dots w_l A_{\alpha_{l-1}} w_l^{-1} A_{\alpha_l}$;

в) $[B_{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)}, \chi] = \sum_{i=1}^{l} \chi(w_{i+1}\check{\alpha}_i) w_{i+1} w_i^{-1} B_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_l)}$.

8. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_l \in \Delta$ и $w = s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_l}$ — кратчайшее разложение. Докажите, что

а) $A_{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)}$ зависит лишь от w, а не от выбора кратчайшего разложения. Мы обозначаем $A_w := A_{(\alpha_1,\dots,\alpha_l)}$ (*оператор Демазюра*);

б) $[w^{-1}A_w, \chi] = \sum_{y \xrightarrow{\gamma} w} y\chi(\check{\gamma}) w^{-1} A_y$.

9. Для $\chi \in \mathfrak{h}^*$ обозначим $\chi^* : S^\bullet\mathfrak{h} \to S^\bullet\mathfrak{h}$ оператор, сопряженный умножению на χ. Можно интерпретировать $S^\bullet\mathfrak{h}$ как дифференциальные операторы на $\mathfrak{h}$ с постоянными коэффициентами (тогда спаривание с $S^\bullet\mathfrak{h}^*$ записывается как $\langle D, f\rangle = (Df)(0)$). В этих терминах $\chi^*(D) = [D, \chi]$. Далее, $F_\gamma : S^\bullet\mathfrak{h} \to S^\bullet\mathfrak{h}$ обозначает оператор, сопряженный A_γ. Для всякого $D \in S^\bullet\mathfrak{h}$ найдется D' такой, что $\gamma^* D' = D$. Докажите, что

а) Для любого такого D' имеем $D' - s_\gamma D' = F_\gamma(D)$ (в частности, левая часть не зависит от выбора D');

б) Для $w = s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_l}$ $(\alpha_i \in \Delta)$ и $l(w) < l$ имеем $F_{\alpha_l}\dots F_{\alpha_1} = 0$;

в) Для $l(w) = l$ оператор $F_{\alpha_l}\dots F_{\alpha_1}$ зависит лишь от w, а не от выбора его кратчайшего разложения. Он обозначается F_w и сопряжен A_w;

г) $[\chi^*, F_w w] = \sum_{y \xrightarrow{\gamma} w} y\chi(\check{\gamma}) F_y w$.

10. Положим $D_w := F_w(1) \in S^\bullet\mathfrak{h}$. Докажите, что

а) $D_w \in S^{l(w)}\mathfrak{h}$;

б) Для $w \in W,\ \alpha \in \Delta$ имеем $F_\alpha D_w = 0$, если $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$, и $F_\alpha D_w = D_{ws_\alpha}$, если $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$;

в) Для $\chi \in \mathfrak{h}^*$ имеем $\chi^*(D_w) = \sum_{y \xrightarrow{\gamma} w} y\chi(\check{\gamma}) D_y$;

г) Для $\alpha \in \Delta$ имеем $s_\alpha D_w = -D_w$, если $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$, и $s_\alpha D_w = -D_w + \sum_{y \xrightarrow{\gamma} ws_\alpha} y\alpha(\check{\gamma}) D_y$, если $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$;

д) Для $w \in W,\ l(w) = l,\ \chi_1,\dots,\chi_l \in \mathfrak{h}^*$ имеем $\langle D_w, \chi_1\dots\chi_l\rangle = \sum \chi_1(\check{\gamma}_1)\dots\chi_l(\check{\gamma}_l)$, где суммирование ведется по всем цепочкам $e \xrightarrow{\gamma_1} w_1 \xrightarrow{\gamma_2} w_2 \xrightarrow{\gamma_3} \dots \xrightarrow{\gamma_l} w_l = w^{-1}$.

11. Обозначим $\mathcal{G} \subset S^\bullet\mathfrak{h}$ подпространство, ортогональное идеалу $I \subset S^\bullet\mathfrak{h}^*$. Докажите, что

а) $\mathcal{G}$ инвариантно относительно операторов F_γ;

б) $1 \in \mathcal{G},\ D_w \in \mathcal{G}$;

в) $\{D_w,\ w \in W\}$ образует базис $\mathcal{G}$.

12. Пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ двойственны относительно $\langle,\rangle$. Обозначим $\{P_w,\ w \in W\}$ базис $\mathcal{H}$, двойственный $\{D_w\}$. Докажите, что

а) Для $w \in W,\ \alpha \in \Delta$ имеем $A_\alpha P_w = 0$, если $l(ws_\alpha) = l(w)+1$, и $A_\alpha P_w = P_{ws_\alpha}$, если $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$;

б) Для $\chi \in \mathfrak{h}^*$ имеем $\chi P_w = \sum_{w \xrightarrow{\gamma} y} w\chi(\check{\gamma}) P_y$;

в) Для $\alpha \in \Delta$ имеем $s_\alpha P_w = P_w$, если $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$, и $s_\alpha P_w = P_w - \sum_{ws_\alpha \xrightarrow{\gamma} y} w\alpha(\check{\gamma}) P_y$, если $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$.

13. Пусть $w = w_0 s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_l},\ l(w) = \nu - l$. Докажите, что

а) $P_w = A_{\alpha_l}\dots A_{\alpha_1} P_{w_0}$;

б) $P_{w_0} = |W|^{-1}\prod_{\gamma\in R^+}\gamma \pmod{I}$.

Основная теорема геометрического исчисления Шуберта утверждает, что P_w — это класс, двойственный по Пуанкаре фундаментальному циклу многообразия Шуберта $\overline{\mathcal{B}}_w$.