Введение в геометрическую теорию инвариантов

Иван Аржанцев

курс проведен в весеннем семестре 2000 года

Задачи

1. Пусть G - редуктивная группа, $G : V$ - линейное представление. Предположим, Вы обнаружили в V G-орбиту коразмерности 1. Как может быть устроена алгебра инвариантов $k[V]^G$?

2. Пусть T - алгебраический тор, $T : V$ - линейное представление. В терминах весов этого представления найти критерий того, что категорный фактор $V//T$ есть а) точка; б) прямая.

3. Привести пример алгебраической группы G и действия $G : X$ на аффинном многообразии с открытой орбитой, таких что число G-орбит в X бесконечно. Для каких классов групп G такая ситуация невозможна?

4. Пусть L — G-линеаризуемое линейное расслоение над группой G (относительно действия левыми сдвигами $G : G$). Доказать, что расслоение L тривиально. Привести примеры линеаризации нетривиальных расслоений над однородными пространствами редуктивных групп.

5. Напомним, что по определению множество стабильных точек есть $X^S(L) = \{x \in X^{SS}(L) \mid G_x$ – конечен и $Gx \subset X^{ss}(L)$ – замкнута$\}$. В случае, когда $X = \mathbb{P}(V)$, покажите на примерах, что указанные два условия не вытекают друг из друга.

6. Пусть $x \in \mathbb{P}(V)$ и $\tilde{x} \in V$ – соответствующая точка в линейном пространстве (определена с точностью до ненулевой константы). Доказать, что точка x стабильна тогда и только тогда, когда $G_{\tilde{x}}$ конечен и $G\tilde{x}$ замкнуто в V.

7. Естественное действие $SL_3 : V =< x^3, y^3, z^3, x^2y, \dots >$ индуцирует действие $SL_3 : X = \mathbb{P}(V \bigoplus V \bigoplus V \bigoplus V)$. Существует ли очень обильное расслоение и его линеаризация на X такие, что точка $(x^3, 0, 2x^3, 0) \in X$ полустабильна?

8. Пусть $\mathbb{C}^* : \mathbb{C}^4$ с весами $(-2, -1, -1, 1)$ и $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$. Описать факторы $X^{ss}/\mathbb{C}^*$ при всевозможных линеаризациях расслоения $\mathcal{O}(1)$ над $\mathbb{P}^3$.

9. Пусть $G : X$ - линейное представление полупростой группы. Может ли точка из нуль-конуса иметь конечный стабилизатор?

10. Пусть $G : \mathbb{P}^n$, $x \in \mathbb{P}^n$ и орбита Gx аффинна. Верно ли, что существует очень обильное расслоение над $\mathbb{P}^n$ и его линеаризация, для которых точка x полустабильна?

11. Пусть G - полупростая группа, $G : X$ - аффинное многообразие, $\pi : X \to X//G$ - категорный фактор. Может ли оказаться, что для всех $y \in X//G$ выполнено $\dim \pi^{-1}(y) > \dim G$?

12. Используя контрпример Нагаты к 14-й проблеме Гильберта, указать пример аффинного многообразия X и алгебраической группы G, действующей на X таких, что $k[X]^G$ не является конечнопорожденной, но существует геометрический фактор X/G.