Задачи по теории вероятностей
Первый листок

Какова вероятность, что 8 марта 2000 года будет солнечная погода?
Какова вероятность, что телефон Вашего нового знакомого начинается на 13?
Если Вам что-либо не нравится в этих вопросах, то попробуйте сформулировать, что именно.

1. Докажите, что вероятность счетно–аддитивна, то есть, что если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

2. Пусть A и B — независимые события в вероятностном пространстве X. Верно ли, что A и $X \setminus B$ независимы? $X \setminus A$ и $X \setminus B$ независимы?

3. Какие события независимы сами с собой?

4. Пусть существует математическое ожидание квадрата случайной величины. Докажите, что существует математическое ожидание самой случайной величины.

5. Пусть случайная величина f такова, что существует $E(f^2)$. Докажите, что существует дисперсия $D(f)$ и выполнено тождество $D(f) = E(f^2) - E(f)^2$.

6. Пусть дисперсия случайной величины равна нулю. Что это значит?

7. Пусть H_i — события в вероятностном пространстве X, такие что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = X$ и $P(H_i \cap H_j) = 0$ при $i \neq j$. Пусть A — произвольное событие. Докажите:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i)P(H_i)$$

(формула полной вероятности)

Докажите, что при всяком k

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A|H_i)P(H_i)}$$

(формула Байеса).

8. Сколько раз нужно бросить игральный кубик, чтобы вероятность получить хотя бы одну шестёрку стала больше половины?

9. Пару кубиков бросили два раза. Какова вероятность, что оба раза выпадут те же очки, если а) кубики различимы б) кубики неразличимы

10. Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в игре в теннис, отец обещает ему приз, если сын выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего отца и клубного чемпиона по одной из схем: отец-чемпион-отец или чемпион-отец-чемпион по выбору сына. Чемпион играет лучше отца. Какую схему следует выбрать сыну?

11. Секретарша отправляет n писем по n различным адресам, причем конверты с адресами она выбирает случайным образом. Сколько писем в среднем попадет в нужные конверты?

12. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с бóльшей вероятностью?

13. В жюри из трех человек окончательное решение выносится большинством голосов. Председатель жюри принимает правильное решение с вероятностью 0.7, второй член жюри (молодой, но талантливый) независимо от председателя принимает правильное решение с вероятностью 0.9, а третий для вынесения решения бросает монету. Как изменится для жюри вероятность вынести правильное решение, если третий перестанет бросать монету и начнёт копировать решение председателя?

14. При бросании $2N$ монет какова вероятность выпадения ровно N гербов? Оцените порядок этой вероятности при $N \to \infty$. Какова она (примерно) при $N = 50$?

15. **Распределение Больцмана.* Пусть имеется M коробочек и N различных шариков, причем $N \gg M \gg 1$. На каждой коробочке написано число, которое будем называть энергией шарика в этой коробочке. Из всех возможных расселений шариков по коробочкам выберем те, при которых суммарная энергия всех шариков равна заданному числу E_0. Пусть все эти расселения равновероятны. Сколько шариков вероятнее всего обнаружить в коробочке с энергией E_i (Ответ называется *числом заполнения* энергетического уровня E_i. Он показывает как расселяются частицы по энергетическим уровням и состоянии теплового равновесия).

16. ** *Распределение Бозе-Эйнштейна.* Та же задача для неразличимых шариков.

PostScriptum.

Парадокс заключённого.

Двое из трех заключенных, обозначаемых А, В и С, будут казнены. Они это знают, но не могут догадаться, кому же из них повезет. А рассуждает: "Вероятность, что меня не казнят, равна 1/3. Если я попрошу охранника назвать имя (отличное от моего) одного из двух заключенных, которых казнят, то тогда останется только две возможности. Либо другой, кого казнят, это я, либо нет, и поэтому шансы, что я выживу, увеличатся до 1/2". Однако также справедливо, что уже перед тем, как А спросит охранника, он знает, что одного из его компаньонов наверняка казнят, так что охранник не сообщит А никакой новой информации относительно его судьбы. Почему тогда вероятность казни изменилась?