Задачи по теории вероятностей

Десятый листок

Случайные блуждания

Точка гуляет по прямой, начиная движение из нуля и совершая шаги $+1$ или -1 с вероятностями p и q соответственно (стоять нельзя: $p+q=1$). Если не оговорено противное, блуждания предполагаются симметричными ($p=q=1/2$).

1. Найдите среднеквадратичное смещение за n шагов.

2. Два игрока играют в орлянку n раз. После первого бросания каковы шансы на то, что в течение всей игры их выигрыши не совпадут?

3. * Пусть на $2n$-ном шаге точка вернулась в начало. Докажите, что вероятность того, что она провела ровно $2k$ шагов на положительной полуоси не зависит от k.

4. * Докажите, что вероятность за время $2n$ ровно k раз возвратится в начало, равна $\frac{1}{2^{2n-k}}C_{2n-k}^{n}$. Найдите асимптотическое поведение числа возвращений при больших n.

5. Пусть $p_{k,n}$ - вероятность того, что первое достижение точки k при несимметричных блужданиях произошло на n-ном шаге, а $f_k(x)$ - производящая функция этих вероятностей.
   1) Выразите f_k через f_1.
   2) Найдите f_1, а затем и f_k.
   3) Как зависит вероятность достижения единицы от p?
   4) Каково среднее время ожидания достижения единицы?

6. Найдите производящую функцию для вероятностей первого возвращения в ноль на n-ном шаге при несимметричных блужданиях.
   1) Какова вероятность, что хотя бы одно возвращение произойдёт?
   2) Найдите среднее время ожидания первого возвращения.
   3) Найдите среднее время ожидания первого возвращения при условии, что оно произошло

7. Покажите, что следующие события имеют одинаковую вероятность:
   1) в момент времени $2n$ имеет место возвращение в ноль;
   2) до момента времени $2n$ включительно частица ни разу не возвратилась в ноль;
   3) путь неотрицателен в интервале между 0 и $2n$.

8. Пусть u_n - вероятность первого возвращения в ноль на n-ном шаге. Покажите, что следующие события имеют вероятность $2u_{2n+2}$:
   1) Возвращение в ноль в момент $2n$ по неотрицательному пути.
   2) Первому изменению знака предшествует $2n$ испытаний.

9. * *Закон арксинуса.* Пусть u_{2n} - вероятность возвращения в ноль на $2n$-ном шаге. Докажите, что вероятность провести на положительной стороне ровно $2k$ шагов из $2n$ равна $p_{2k,2n}=u_{2k}u_{2n-2k}$. Найдите распределение для доли времени, проведённой на положительной полуоси за большое число шагов.

10. * *Закон повторного логарифма.* Пусть ξ_i - независимые случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно, а $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Тогда неравенство $S_n > np+\lambda\sqrt{2npq\ln\ln n}$ с вероятностью единица при $\lambda<1$ осуществится лишь конечное число раз, а при $\lambda>1$ - бесконечное число раз.