Задачи по теории вероятностей

Одиннадцатый листок

Статистика

Пусть X_i - независимые одинаково распределённые случайные величины, функция распределения которых зависит от параметра θ. Требуется оценить этот параметр.

Определение 1. Случайная величина $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, ..., X_n)$ называется несмещенной оценкой параметра θ если $E\hat{\theta}_n = \theta$.

Определение 2. $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра θ если $\hat{\theta}_n \to \theta$ по вероятности при $n \to \infty$.

Задача 0. Показать, что из несмещенности не следует состоятельность и из состоятельности не следует несмещенность.

Задача 1. Убедится в том, что оценка математического ожидания $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ является а) несмещенной б) состоятельной. Подразумевается, что математическое ожидание существует.

Задача 2. Убедится в том, что естественная, на первый взгляд, оценка дисперсии $s^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ является смещенной. Поправить эту оценку и доказать состоятельность исправленной оценки.

Определение 3. Вариационным рядом выборки $X_1, ..., X_n$ называется эта же выборка расположенная по возрастанию. Вариационный ряд обозначается $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$.

Задача 3. Пусть $X_1, ..., X_n$ выборка из равномерного на отрезке $[0; \theta]$ распределения. Требуется оценить параметр θ. $\theta_1 = X_{(n)}$ является, очевидно, смещенной оценкой параметра θ. Поправить эту оценку и сравнить дисперсии полученной оценки и естественной оценки $\theta_2 = 2\bar{X}$.

Задача 4. Известно, что время жизни лампочек распределено по экспоненциальному закону с параметром λ, т.е. $P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$ при $t > 0$ и $P(\xi > 0) = 1$. Пусть мы тестируем n лампочек для выявления интенсивности старения λ. $X_{(1)}$ – время жизни самой плохой лампочки, $X_{(n)}$ – время жизни лампочки долгожительнецы.
а) Построить оценку для параметра λ по наблюдениям $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$.
Пусть $Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$.
б) Показать, что велечины Y_i независимы.
в) Построить оценку для параметра λ по $Y_i, i = 1, ..., k < n$.
Указание: воспользоваться свойством "потери памяти" экспоненциального распределения, т.е. тем, что $P(\xi > s + t | \xi > s) = P(\xi > t)$.

Задача 5. В плоскости на растоянии 1 от одномерного экрана расположен источник, испускающий случайные импульсы равномерно вокруг себя. Координаты изображений импульсов на экране $X_1, ..., X_n$. Оценить положение источника.