Задачи по теории вероятностей
Второй листок

Мера и лебегово продолжение

Во всех задачах X — множество, 2^X — множество всех подмножеств X. В некоторых задачах на X задано полукольцо множеств $\mathcal{S}$; соответствующее кольцо обозначается R, соответствующая σ- алгебра — $\mathcal{A}$.
Пусть μ — σ-аддитивная мера на $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств; продолжение меры μ на $\mathcal{L}$ также обозначается μ; внешняя мера на 2^X обозначается μ^*.

1. Для любых $A, B, C \in 2^X$ выполнено $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$.

2. Для любых $A_1, B_1, A_2, B_2 \in X$ имеем $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (B_1\Delta B_2)$ и аналогичные формулы для пересечения и разности. Напишите их и докажите.

3. Два множества $A, B \in 2^X$ назовем эквивалентными, если $\mu^*(A\Delta B) = 0$. Введем на классах эквивалентности метрику формулой $d(A, B) = \mu^*(A\Delta B)$.
   а) Проверьте, что это и вправду метрика.
   б) Покажите, что описанное метрическое пространство полно.
   в) Покажите, что $\mathcal{L}$ — замкнутое подмножество этого пространства.
   г) Покажите, что $\mathcal{L}$ — замыкание $\mathcal{R}$.

4. Система множеств замкнутая относительно объединения и пересечения не обязана быть кольцом, а замкнутая относительно объединения и разности — обязана.

5. Прямое произведение полуколец есть полукольцо. Прямое произведение колец не всегда кольцо.

6. Докажите, что пересечение счетного семейства множеств σ-алгебры принадлежит σ-алгебре.

7. Пусть $E_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$. *Верхним пределом* последовательности E_n Называется множество $\limsup E_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n\geq k} E_n$, а *нижним пределом* — множество $\liminf E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geq k} E_n$. Покажите, что $\liminf E_n \subset \limsup E_n$. Приведите пример, когда это вложение строгое, а также пример, когда оно обращается в равенство (в последнем случае говорят, что последовательность множеств *сходится*).

8. Докажите, что характеристическая функция верхнего предела последовательности множеств есть верхний предел характеристических функций множеств. То же для нижнего предела.

9. *(Лемма Бореля – Кантелли.)* Пусть $A_n \in \mathcal{L}$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Покажите, что $\mu(\limsup A_n) = 0$.

10. Пусть на кольце множеств задана мера. Покажите, что следующие свойства равносильны:
    а) счетная аддитивность
    б) полунепрерывность сверху: если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $\bigcup A_n = A$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
    в) полунепрерывность снизу: если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $\bigcap A_n = A$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
    г) непрерывность: $\mu(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

11. Доказать, что измеримое по Лебегу множество на отрезке есть объединение борелевского и множества меры нуль.

12. Любой элемент из $\mathcal{L}$ есть объединение множества из $\mathcal{A}$ и множества меры нуль.

13. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $A \in \mathcal{A}$ найдется $R \in \mathcal{R}$ такое, что $\mu(A\Delta R) < \varepsilon$.

Условные вероятности и формула Байеса

Напомним формулу Байеса. Пусть H_i *— события в вероятностном пространстве* X*, такие что* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = X$ *и* $P(H_i \bigcap H_j) = 0$ *при* $i \neq j$*. Пусть* A *— произвольное событие. Тогда (формула полной вероятности)*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|H_i)P(H_i)$$

и при всяком k *(формула Байеса)*

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A|H_i)P(H_i)}$$

14. В семье из двух детей один ребёнок - мальчик. Какова вероятность, что второй тоже мальчик?

15. При бросании десяти игральных кубиков выпала по крайней мере одна единица. Какова вероятность, что выпало две и более единиц?

16. Для регистрации частицы установлены три счётчика. Первый регистрирует попавшую в него частицу с вероятностью $0,6$, второй - с вероятностью $0,8$, третий - с вероятностью $0,55$. Частица попадает в первый счётчик с вероятностью $0,3$, во второй - с вероятностью $0,2$, в третий - с вероятностью $0,4$. Какова вероятность зарегистрировать частицу?

17. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй - 20%, третий - 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй - 8%, третий - 3%. Выбранное наугад изделие естественно оказалось бракованным. Какова вероятность, что оно изготовлено на втором заводе?

18. Два охотника одновременно стреляют одинаковыми пулями в медведя. В результате медведь был убит одной пулей. Как должны поделить охотники шкуру, если вероятность попадания у первого охотника $0,3$, а у второго - $0,6$?

19. В группе 15 студентов. Из них: 5 "отличников", 7 "четверочников" и 3 "троечника". Известно, что "отличник" с вероятностью $0,9$ получает на каждом экзамене "отлично" и с вероятностью $0,1$ - "хорошо". Аналогично, "четверочник" с вероятностью $0,1$ получает "отлично", с вероятностью $0,7$ — "хорошо" и с вероятностью $0,2$ — "удовлетворительно". Наконец, "троечник" получает с вероятностью $0,1$ "отлично", с вероятностью $0,2$ — "хорошо" и с вероятностью $0,7$ - "удовлетворительно". Некоторый студент из этой группы получил на первом экзамене "хорошо". Какова вероятность того, что на следующем экзамене он получит "отлично"?

20. * Монету сто раз бросили и все сто раз выпал герб. Какова вероятность, что и в сто первый раз выпадет герб?