# Задачи по теории вероятностей
# Третий листок

## Вероятностные пространства

1. Пусть на алгебре множеств задана счетно-аддитивная вероятностная мера. Покажите, что она однозначно продолжается на порожденную этой алгеброй $\sigma$-алгебру.

2. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра, порожденная $\mathcal{A}$. Докажите, что для всякого $B \in \mathcal{B}$ найдется $A \in \mathcal{A}$ такое что $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

3. Обозначим $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$. Докажите, что множество $A$ в вероятностном пространстве измеримо если и только если $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

4. Существует ли измеримое меожество на квадрате, обе проекции которого на координатные пространства неизмеримы?

5. $^{*/2}$ Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой. Пусть $\sigma$-алгебра $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ порождена множествами вида $A \times B$, где $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Определите меру $\mu \times \nu$ естественным образом и докажите ее $\sigma$-аддитивность.

6. Докажите, что верхний и нижний пределы( а также предел, если есть) последовательности измеримых функций измеримы.

7. Пусть случайная величина $\xi$ имеет функцию распределения $F$. Найдите распределение случайной величины $F(\xi)$.

8. Пусть дана борелевская вероятностная мера $\mu$ на $\mathbf{R}$. Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого измеримого $A$ найдется компакт $K$, такой, что $\mu(A \Delta K) < \varepsilon$.

9. Пусть $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на $\mathbf{R}$, $\mu$ — борелевская вероятностная мера. Докажите корректную определенность и $\sigma$-аддитивность меры $(\mathbf{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, \mu^\infty)$.

10. * Докажите теорему Колмогорова о существовании процесса.

## Основные распределения

*Повторные независимые испытания называют испытаниями Бернулли, если при каждом испытании возможны только два исхода и вероятности этих исходов остаются неизменными для всех испытаний. Исходы принято называть "успех" и "неудача", а их вероятности обозначать соответственно $p$ и $q$ $(p + q = 1)$.*

11. *Геометрическое распределение.* Найдите распределение номера первого успеха в бесконечной серии испытаний Бернулли. Проверьте нормировку полученного распределения. Вычислите для него среднее и дисперсию.

12. *Распределение Бернулли (биномиальное).* Найдите распределение для количества успехов, выпавших в серии из $N$ испытаний Бернулли. Проверьте нормировку. Найдите среднее и дисперсию.

13. *Распределение Пуассона.* Рассмотрите предельный переход к непрерывному времени: испытаний всё больше, вероятность успеха в каждом всё меньше, а среднее число успехов остаётся постоянным. Получите предельное распределение числа успехов.

14. Для распределения, полученного в задаче 13, проверьте нормировку, найдите среднее и дисперсию.

15. К чему стремятся среднее и дисперсия распределения Бернулли при предельном переходе из задачи 13?

16. Предположим, что бросают две симметричные монеты. Покажите, что события $A$ — на первой монете выпал герб, $B$ — на второй монете выпал герб и $C$ — на одной (и только на одной) монете выпал герб — попарно независимы. (Заметьте, что любые два из них однозначно определяют третье).

17. * При промышленном изготовлении одинаковых булочек с изюмом замешивается сразу очень большое количество теста, и после добавления изюма оно тщательно перемешивается. Сколько в среднем изюминок должно приходится на одну булочку, чтобы вероятность отсутствия изюма в булочке была меньше одного процента?