Задачи по теории вероятностей
Четвертый листок

Измеримые функции и интеграл Лебега

1. Пример ограниченной последовательности измеримых функций, сходящейся поточечно, но не равномерно.
2. Пример ограниченной последовательности измеримых функций, сходящейся по мере, но не почти всюду.
3. Пример ограниченной последовательности измеримых функций, сходящейся в L_1, но не почти всюду.
4. Пример последовательности измеримых функций, сходящейся почти всюду, но не в L_1.
5. Постройте канторово множество положительной меры Лебега.
6. Докажите, что предел по мере, поточечный (почти всюду) или равномерный, последовательности измеримых функций измерим.
7. Если две непрерывные функции эквивалентны по мере Лебега, то они совпадают.
8. Сумма, произведение и частное измеримых функций измеримы.
9. Функция интегрируема если и только если ее модуль интегрируем.
10. Функция, принимающая счетное множество значений измерима, если и только если она принимает каждое значение на измеримом множестве.
11. Сумма суммируемых функций суммируема. Верно ли это для произведения?
12. Ограниченная измеримая функция суммируема.
13. Пусть $f, g \in L_1$, $k \in \mathbf{R}$. Докажите, что $\int f + g = \int f + \int g$, $\int kf = k \int f$.
14. Пусть (X, μ) — вероятностное пространство, функция $f \in L_1(X, \mu)$, $|f| \leq M$. Докажите, что $|\int f d\mu| \leq M$.
15. Если f — случайная величина и существует $E(f^2)$, то существует и $E(f)$.
16. Докажите, что $D(f) = E(f^2) - (E(f))^2$.
17. * Докажите теорему Лузина: измеримую функцию можно так изменить на множестве сколь угодно малой меры, что она станет непрерывной.

Распределения и плотности

18. Дайте определение совместной функции распределения случайных величин. Выразите через неё совместную плотность, предполагая, что она существует.
19. Как по совместной плотности двух случайных величин найти плотность каждой из них?
20. Выразите совместную плотность двух независимых случайных величин через частные плотности. То же для функций распределения.
21. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найдите совместную плотность для $s_1 = \xi_1$ и $s_2 = \xi_1 + \xi_2$.
22. Совместная плотность двух случайных величин x и y равна некоторой постоянной A внутри треугольника с вершинами $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ и нулю вне его.
    а) Найдите A.
    б) Независимы ли x и y?
    в) Найдите частные распределения для x и y.
    г) Найдите средние $E(x)$, $E(y)$, $E(xy)$.
    д) Найдите распределение для $z = x - y$.
23. Выразите распределение суммы двух независимых случайных величин через распределения слагаемых. Рассмотрите дискретный и непрерывный случай.
24. * Может ли распределение суммы двух зависимых случайных величин вычисляться по формуле из предыдущей задачи?
25. Найдите плотность суммы двух независимых случайных величин, если каждая из них распределена: а) равномерно на $[0, 1]$; б) показательно $\rho(x) = ae^{-ax}$ при $x > 0$.
26. Какую максимальную дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения в отрезке длины 1?