Задачи по теории вероятностей
Пятый листок

Непрерывные распределения

1. На единичном отрезке наугад выбирают точку, а затем на длинной половине наугад выбирают вторую точку. Какова вероятность, что из трёх получившихся отрезков можно сложить треугольник?

2. На единичном отрезке наугад выбирают точку. Какова средняя длина меньшего отрезка? Средняя длина большего? Найдите среднее отношение длины короткой части к длине длинной и наоборот, среднее отношение длины длинной части к длине короткой.

3. На единичном отрезке наугад выбирают точку. Найдите корреляцию длин короткой и длинной частей.

4. В единичном круге наугад (по площади) выбирается точка. Покажите, что радиус и полярный угол образуют две независимые случайные величины. Найдите их распределения. Чему равно среднее значение радиуса?

5. На единичном отрезке наугад выбирают две точки. Найдите распределение и среднее значение наибольшей координаты. Независимы ли наибольшая и наименьшая координаты? Найдите их совместное распределение. То же для N точек.

6. * *Статистика.* На некотором единичном отрезке выбирают наугад N точек. Вы видите эти точки, но не знаете расположение отрезка. Какая оценка для координаты середины отрезка на ваш взгляд лучше: среднее арифметическое всех точек или среднее арифметическое двух крайних?

7. Точка распределена на плоскости таким образом, что её координаты x и y являются двумя независимыми случайными величинами со стандартным нормальным распределением каждая. Найдите их совместную плотность. Найдите её значение в точке A с координатами $(1,1)$. Пересчитайте плотность в полярные координаты. Чему теперь равно её значение в точке A?

8. *Распределение Максвелла.* Скорости молекул газа распределены почти как в предыдущей задаче. Их проекции на координатные оси образуют три независимые одинаково нормально распределённые случайные величины с нулевым средним и некой дисперсией (в её роли выступает температура). Найдите распределение для модуля скорости. Найдите наиболее вероятную скорость.

9. Найдите распределение по кинетическим энергиям ($E = v^2$). Найдите наиболее вероятную энергию.

10. Выразите наиболее вероятную энергию через наиболее вероятную скорость. Объясните результат.

Интеграл Лебега

11. Если последовательность ограниченных измеримых функций сходится, то и последовательность интегралов их сходится к интегралу предельной функции. Для ограниченных измеримых функций сходимость по мере и в L_1 равносильны.

12. Дайте пример последовательности суммируемых функций, у которой последовательность интегралов расходится, а предельная функция суммируема; а также пример, когда интегралы сходятся, но не к интегралу предельной функции.

13. Заметризуйте сходимость по мере.

14. Докажите, что $L_1(X,\mu)$ — полное метрическое пространство.

15. При каких $s \in \mathbf{R}$ функция x^s интегрируема на $[0,1]$? При каких $s, t \in \mathbf{R}$ функция $x^s \sin x^t$ интегрируема на $[0,1]$?

16. Докажите, что функция f на вероятностном пространстве интегрируема если и только если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\{x \in X : f(x) \geq 2^n\})$

17. Найдите интеграл Лебега по $[0,\pi/2]$ от функции f
а) $\sin(x)$
б) $f(x) = \sin(x)$ при $x \in \mathbf{Q}$ и $f(x) = \cos(x)$ при $x \notin \mathbf{Q}$
в) $f(x) = \sin(x)$ при $\sin(x) \in \mathbf{Q}$ и $f(x) = \cos(x)$ при $\sin(x) \notin \mathbf{Q}$

Цепи Маркова

18. Собственные числа стохастической матрицы не превосходят 1 по модулю. Если же стохастическая матрица эргодична, то собственное значение 1 имеет кратность 1, а все остальные собственные числа по модулю строго меньше единицы.

19. Пусть задано случайное блуждание на прямой, и пусть S_k — положение частицы в момент k. Покажите, что S_k образуют цепь Маркова.