Задачи по теории вероятностей
Шестой листок

Производящие функции

При решении задач этой части нужно быть знакомым с основными распределениями из Листка 3.

1. Производящей функцией для последовательности p_n называется $f(z) = \sum p_n z^n$. Покажите, что производящая функция распределения случайной величины, принимающей целые неотрицательные значения, существует, т.е. соответствующий ряд сходится для достаточно малых z.

2. * Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи.

3. Найдите непосредственным суммированием производящую функцию для распределений: геометрического, Бернулли, Пуассона.

4. Как, зная производящую функцию, найти среднее и дисперсию не находя самих вероятностей? Проверьте на примерах из предыдущей задачи.

5. Выразите производящую функцию суммы двух независимых случайных величин через производящие функции слагаемых.

6. Покажите, что производящую функцию случайной величины ξ можно трактовать как $E(z^\xi)$. Получите отсюда результат предыдущей задачи.

7. Получите распределение Бернулли, представив случайную величину в виде суммы N одинаковых независимых случайных величин. Найдите также среднее и дисперсию.

8. * Выразите производящую функцию суммы случайного количества независимых одинаково распределённых случайных величин через производящую функцию отдельного слагаемого и производящую функцию количества слагаемых.

9. *Голова и Хвост.* Пусть $h_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$, а $t_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k$. Пусть $P(z)$, $H(z)$ и $T(z)$ - производящие функции для p_n, h_n и t_n соответственно. Выразите $H(z)$ и $T(z)$ через $P(z)$.

10. Покажите, что производящая функция распределения Бернулли при соответствующем предельном переходе переходит в производящую функцию распределения Пуассона.

11. Найдите распределение суммы двух независимых случайных величин, распределённых по Пуассону с параметрами a и b соответственно.

12. Покажите, что распределение Пуассона безгранично делимо, то есть для любого n его можно представить как распределение суммы n независимых одинаково распределённых случайных величин. (Только такие распределения могут выступать в качестве предельных в различных предельных теоремах).

Динамика

13. Опишите периодические траектории сдвига Бернулли. Сколько у него точек периода n?

14. Докажите, что у сдвига Бернулли есть орбиты, всюду плотные в фазовом пространстве.

15. Докажите, что множество периодических точек сдвига Бернулли всюду плотно в пространстве последовательностей. Верно ли аналогичное утверждение для топологических цепей Маркова?

16. Сколько точек периода n у топологической цепи Маркова с матрицей A?

17. Докажите для сдвига Бернулли лемму Аносова: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такая что для любых точек $x_1, \dots, x_N \in \Omega_m$, таких что $d(x_i, \sigma_m(x_{i-1})) < \delta$, найдется точка $y \in \Omega_m$ такая что $d(\sigma_m^n(y), x_n) < \varepsilon$ при всех $n = 1, \dots, N$. При этом точка y может быть выбрана периодической.

18. Постройте изоморфизм tent map и сдвига Бернулли.

19. *Отображение Гаусса* на отрезке $[0, 1]$ задается формулой $x \to \{1/x\}$ (где $\{\}$ — дробная часть). Начертите график отображения Гаусса. Докажите, что оно сохраняет меру с плотностью $\rho(x) = 1/(1 + x)$.

20. Докажите, что отображение Гаусса изоморфно сдвигу Бернулли на пространстве последовательностей из счетного числа символов.

Марковские цепи и случайные блуждания

21. Докажите, что апериодичная неприводимая цепь Маркова эргодична.

22. Докажите, что двумерное симметричное случайное блуждание возвратно.