Задачи по теории вероятностей
Седьмой листок

1. Пусть X_n — последовательность случайных величин. Докажите, что множество точек, при которых X_i сходятся, а также множество точек при которых ряд $\sum X_i$ сходится — измеримы.

2. Докажите закон $0-1$ для эргодических цепей Маркова.

3. *(Лемма Бореля – Кантелли.)* Пусть $A_n \in \mathbb{L}$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Покажите, что $\mu(\limsup A_n) = 0$. Для независимых событий докажите, наоборот, что если ряд расходится, то $\mu(\limsup A_n) = 1$.

4. Пусть X_n — независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией, ограниченной в совокупности. Доказать, что ряд $\sum\limits_n \frac{X_n}{2^n}$ сходится.

Характеристические функции

5. Характеристической функцией $f(t)$ случайной величины ξ называется $E(e^{it\xi})$. Найдите характеристическую функцию для распределений: геометрического, Бернулли, Пуассона.

6. Случайная величина ξ имеет характеристическую функцию $f(t)$. Найдите характеристическую функцию для случайной величины $a\xi + b$.

7. Найдите характеристическую функцию нормального распределения
а) непосредственным вычислением
б) предельным переходом из производящих функций для распределений Бернулли и/или Пуассона.

8. Выразите характеристическую функцию суммы двух независимых случайных величин через характеристические функции слагаемых.

9. * Может ли характеристическая функция суммы двух зависимых случайных величин вычисляться по формуле из предыдущей задачи?

10. Найдите распределение суммы двух независимых случайных величин с нормальными распределениями $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

11. Характеристическая функция непрерывна.

12. Характеристическая функция случайной величины, имеющей конечное математическое ожидание, гладкая.

13. Пусть ξ - случайная величина с вещественной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Докажите, что $f(t) \geq 1 - t^2\sigma^2/2$.

14. Пусть $f(t)$ - характеристическая функция. Докажите, что:
а) $f(0) = 1$
б) $|f(t)| \leq 1$
в) Если $f(\tau) = 1$ при $\tau \neq 0$ и $|f(t)| < 1$ при $0 < t < \tau$, то $f(t)$ периодична с периодом τ. Какой вид в этом случае имеет распределение?
г) Если $|f(t)| = 1$ при всех t, то $f(t) = e^{iat}$. Какой вид в этом случае имеет распределение?

15. а) Если характеристическая функция вещественна, то и она и плотность - чётные.
б) Действительная часть характеристической функции - чётная, а мнимая - нечётная.

16. Как, зная только характеристическую функцию, найти среднее и дисперсию.

17. Моментом порядка n называется $\mu_n = E(x^n)$. Как найти распределение, зная моменты всех порядков?

18. У какого распределения все чётные моменты равны единице, а нечётные - нулю?

19. У какого распределения $\mu_n = n!$?

20. У какого распределения $\mu_n = 0$ при нечётном n и $\mu_n = (n-1)!!$ при чётном n?

21. * Положительная случайная величина ξ имеет логарифмически нормальное (логнормальное) распределение, если $\ln \xi$ распределён нормально. Покажите, что логнормальное распределение не определяется своими моментами.

22. *Равенство Парсеваля.* Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - плотности вероятности, а $F(t)$ и $G(t)$ - соответствующие им характеристические функции. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)F(t)dt$.

23. Пусть $\mathcal{N}(x,\mu,\sigma^2)$ - плотность нормального распределения, а $f(x)$ - непрерывная функция. Рассмотрим $F(\mu,\sigma^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{N}(x,\mu,\sigma^2)dx$. Предполагая, что интеграл сходится, докажите, что $\lim\limits_{\sigma\to 0} F(\mu,\sigma^2) = f(\mu)$.

24. Пользуясь результатами двух предыдущих задач (или как-нибудь ещё), получите формулу обращения:
$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\,dt$$

25. Пусть $\{\varphi_n\}$ - последовательность характеристических функций, сходящаяся к φ в смысле L_1 ($\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_n - \varphi|dt \to 0$). Докажите, что последовательность соответствующих распределений сходится равномерно.

26. * Докажите, что для слабой сходимости распределений достаточно поточечной сходимости характеристических функций к функции, непрерывной в некоторой окрестности нуля.

27. * Среднее арифметическое любого числа независимых одинаково распределённых случайных величин имеет то же распределение, что и каждая из них. Найдите вид распределения.

28. Пусть ξ_k - n независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих распределение Коши: $\rho(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}$. Найдите распределение их среднего арифметического.

29. * Найдите характеристическую функцию многомерного нормального распределения.

30. Функция $F(\omega)$ называется преобразованием Фурье функции $f(t)$ если: $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$. Формула обращения $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$. Покажите, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi}$.

31. Свёрткой двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $h(x) \equiv f\star g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi$. Докажите, что $f\star g = g\star f$. Выразите преобразование Фурье свёртки через преобразования Фурье её компонент.

32. * Покажите, что из $F_1\star G = F_2\star G$ вообще говоря не следует, что $F_1 = F_2$. В каком случае можно "сокращать"?

33. *Неравенство Вейля (соотношение неопределённостей).* Пусть функции f и g (вообще говоря, комплексно-значные) связаны преобразованием Фурье: $g(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ и, кроме того $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = 1$. Тогда функции $|f(t)|^2$ и $|g(t)|^2/2\pi$ будут плотностями некоторых случайных величин. Покажите, что произведение их дисперсий не меньше $1/4$. Для каких функций $f(t)$ достигается этот минимум?