Задачи по теории вероятностей

Восьмой листок

Распределение Гаусса

1. *Распределение Гаусса (нормальное).* Для непрерывного распределения $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ проверьте нормировку, вычислите среднее и дисперсию.

2. Найдите распределение для ξ^2, если ξ имеет стандартное нормальное распределение.

3. *Предельная теорема Муавра-Лапласа.* Сформулируйте и докажите.

4. Докажите, что корреляция двух случайных величин по модулю не превышает единицу и равна единице, только если они *линейно* зависимы.

5. Приведите пример двух зависимых случайных величин с нулевой корреляцией.

6. Покажите, что ковариационная матрица невырожденного распределения положительно определена.

7. Как преобразуется ковариационная матрица при линейной замене переменных?

8. Покажите, что из n случайных величин всегда можно выбрать n некоррелированных линейных комбинаций.

9. Для распределения $\rho(x,y) = Ae^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}$, где $ac > b^2$, найдите: A, $E(x)$, $E(y)$, $\sigma_1^2 = D(x)$, $\sigma_2^2 = D(y)$, $cov(x,y)$, $r = corr(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma_1\sigma_2}$, $E(x|y)$. Запишите ответ, выразив исходную плотность через σ_1, σ_2 и r.

10. Многомерное нормальное распределение задаётся совместной плотностью вида:
$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = Ae^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{ik} a_{ik}(x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k)}$$
где (a_{ik}) — симметричная положительно определённая матрица. Найдите нормировочную постоянную и ковариационную матрицу. *(В этой и последующих задачах можно считать, что $\mu_i = 0$.)*

11. Покажите, что для нормального распределения некоррелированность равносильна независимости.

12. Предложите пример распределения, не являющегося нормальным, все частные распределения которого нормальны.

13. Сумма нормально распределённых (в совокупности) случайных величин имеет нормальное распределение, даже если они зависимы.

14. Независимые случайные величины x_1 и x_2 имеют стандартное нормальное распределение. Покажите, что величины $y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha$ и $y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha$ также независимы при любом α.

15. * Пусть совокупность случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет нормальную плотность. Тогда:
    1) условная плотность ξ_n при данных $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ тоже нормальна;
    2) условное математическое ожидание ξ_n при заданных $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — линейная функция от них: $E(\xi_n|\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = a_1\xi_1 + \ldots + a_{n-1}\xi_{n-1}$;
    3) пусть числа b_i таковы, что случайная величина $\eta = \xi_n - b_1\xi_1 - \ldots - b_{n-1}\xi_{n-1}$ не зависит от $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Тогда b_i определены этим условием однозначно и $b_i = a_i$.

16. * *Лемма Фишера.* Если x_i - независимые нормально распределённые (в совокупности) случайные величины, то выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ независимы.

17. * *Теорема Скитовича.* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - взаимно независимые случайные величины, $x_1 = \sum a_i\xi_i$ и $x_2 = \sum b_i\xi_i$, где ни один из коэффициентов a_i и b_i не равен нулю. Если x_1 и x_2 независимы, то все ξ_i распределены нормально. Докажите для $n = 2$.

18. * Если t имеет стандартное нормальное распределение, то $x = \frac{a^2}{t^2}$ имеет плотность $\rho_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{2x}}$, которая обладает свойством $\rho_a \star \rho_b = \rho_{a+b}$. Получите отсюда, что если ξ_i — независимые одинаково распределённые случайные величины с плотностью ρ_a, то $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n^2}$ имеет то же самое распределение.

19. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Найдите распределение для ξ_1/ξ_2.

20. Найдите распределение для $\xi = a \operatorname{tg} \alpha$, если α имеет равномерное распределение на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

21. * Напомним, что энтропией распределения называется $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ в дискретном случае и $S = -\int \rho(x) \ln \rho(x) dx$ в непрерывном. Найдите распределение с максимальной энтропией среди непрерывных распределений, сосредоточенных на единичном отрезке (то есть $\rho(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$).

22. * Найдите распределение с максимальной энтропией среди распределений с заданной дисперсией.