Задачи по теории вероятностей
Девятый листок

Пуассоновский процесс

Вероятность получить за время dt частицу в счётчик Гейгера пропорциональна dt: $dp = \alpha dt$ (α от времени не зависит). Так же устроены многие другие процессы: радиоактивный распад, звонки на АТС, автобусы без расписания, распределение звёзд в галактике и изюма в булочках ($dp = \alpha dV$).

1. Найдите распределение времени ожидания энной частицы.

2. Три лица A, B и C прибывают в почтовое отделение и находят два окна свободными. Три времени обслуживания представляют собой независимые случайные величины с одинаковым показательным распределением. Обслуживание A и B начинается сразу, а обслуживание C в момент, когда или A или B уходит. Какова вероятность, что C уйдёт не последним?

3. Пусть t_1 и t_2 - две независимые случайные величины с одинаковыми показательными распределениями. Найдите распределение t_1 при условии $t_1 + t_2 = s = const$. Обсудите связь с «отсутствием последействия».

4. * На отрезок $[0, 1]$ наугад бросают N точек. Найдите среднюю длину i-того слева отрезка. Найдите среднюю длину отрезка, накрывшего точку $1/2$.

5. * На автобусных остановках обычно указывается интервал движения автобуса, т.е. среднее время между двумя последовательными прибытиями автобусов. Предположим, что на некоторой автобусной остановке интервал движения составляет 10 мин. Тогда естественно считать, что люди ждут автобус в среднем 5 мин. Покажите, что среднее время ожидания может не только превосходить 5 мин, но и быть бесконечным.

Эргодическая теория

6. Привести пример отображения, имеющего бесконечно много инвариантных мер.

7. Множество А называется инвариантным, если $A = T^{-1}A$, и инвариантным mod 0, если $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$. Докажите, что если A инвариантно mod 0, то найдется такое инвариантное множество A_1, что $\mu(A \triangle A_1) = 0$.

8. Докажите эквивалентность следующих определений эргодичности:

   а) отображение T эргодично, если в теореме Биргофа-Хинчина для любой $f \in L_1$ предельная функция $\bar{f}$ есть константа почти всюду.

   б) отображение T эргодично, если любая инвариантная L_1-функция есть константа почти всюду.

   в) для всякого инвариантного mod 0 множества его мера равна 0 или 1.

   г) отображение T эргодично относительно вероятностной меры μ, если мера μ не может быть представлена в виде $\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, где $0 < \lambda < 1$, μ_1, μ_2- T-инвариантные вероятностные меры и μ_1 не совпадает с μ_2.

9. Приведите пример отображения T, которое отоситеьно некоторой меры μ_1 эргодично, а относительно некоторой меры μ_2 - нет.

10. Докажите, что если T эргодично, то $T|_{supp\,\mu}$ обладает плотной орбитой.

11. Приведите пример меры, эргодической относительно любого преобразования, оставляющего эту меру инвариантной.

12. Докажите, что из перемешивания следует эргодичность.

13. Приведите пример эргодического, но не перемешивающего преобразования.

14. Верно ли, что если T перемешивает, то T^k тоже перемешивает? Верно ли обратное?

15. Перемешивает ли сдвиг Бернулли?