Экзамен по теории вероятностей

18 мая 2000 года

1) Сформулируйте:

   а) неравенство Колмогорова и усиленный закон больших чисел

   б) законы 0-1 Колмогорова и Хьюитта–Сэвиджа

   в) эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина

   г) теорему Колмогорова–Хинчина о рядах

   д) эргодическую теорему для цепей Маркова

2) На единичный отрезок наугад бросаются две точки. Найдите функцию распределения расстояния между ними.

3) Количество яиц, откладываемых некоторым насекомым, распределено по Пуассону с параметром λ. Вероятность развития потомка из яйца равна p.

   а) Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?

   б) Если у насекомого развилось ровно m потомков, то какова вероятность, что при этом было отложено ровно k яиц?

4) Рассмотрим марковскую цепь с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Докажите ее неприводимость. Найдите период и стационарное распределение.

5) Рассмотрим марковскую цепь с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   а) Докажите неприводимость и найдите период.

   б) Найдите стационарное распределение.

   в) Докажите нетривиальность симметрической сигма-алгебры для этой цепи.
   (Подсказка: симметрическое событие может быть найдено в виде $\{\omega_1 = i\}$)

6) Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Найдите распределение случайной величины ξ_1/ξ_2.

7) Точка наугад бросается в круг единичного радиуса. Независимы ли ее декартовы координаты? Найдите коэффициент корреляции между ними.

8) Докажите, что для любого $k \geq 1$ существует такая функция

$$F_k(\xi) = P(\mu_1, ..., \mu_k) = \mu_k + Q(\mu_1, ..., \mu_{k-1})$$

   где $\mu_n = E(\xi^n)$, P и Q - полиномы, что для суммы независимых случайных величин

$$F_k(\xi + \eta) = F_k(\xi) + F_k(\eta)$$

   Примеры: $F_1(\xi) = E(\xi), F_2(\xi) = D(\xi)$.

9) В серии испытаний Бернулли (с вероятностями p и q) определим случайную величину ξ_n как номер испытания, при котором в n-ный раз случился успех.

   а) Найдите характеристическую функцию для ξ_n.

   б) Подберите постоянную a так, чтобы последовательность случайных величин

   $$\eta_n = \frac{\xi_n - an}{\sqrt{n}}$$

   слабо сходилась к некоторой случайной величине. Найдите предельное распределение.

10) Докажите, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ - характеристические функции, то их выпуклая комбинация $p_1\varphi_1 + \ldots + p_n\varphi_n$, (где $p_k \geq 0$, $\sum p_k = 1$), также является характеристической функцией.