ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ

Ф. Л. Зак

Май 2001г.

Задача 1. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — невырожденная кривая. Докажите, что $\deg C \geq n$, причём $\deg C = n$ тогда и только тогда, когда $C = v_n(\mathbb{P}^1)$, где $v_n \colon C \to \mathbb{P}^n$ — отображение Веронезе.

Задача 2. Пусть $C = v_n(\mathbb{P}^1)$ — нормальная рациональная кривая, и пусть D — эффективный дивизор степени $d \leq n$ на C. Докажите, что $\dim \overline{D} = d - 1$, где $\overline{D}$ — линейная оболочка дивизора D, т.е. пересечение всех гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}^n$, для которых $H \cdot C \geq D$. Какое отношение имеет эта задача к определителю Вандермонда?

Задача 3. Пусть $(\mathbb{P}^1)^{(n)} = \underbrace{\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1}_{n} / S_n$ — n-ая симметрическая степень проективной прямой (здесь S_n — группа перестановок n элементов). Докажите, что $(\mathbb{P}^1)^{(n)}$ изоморфно $\mathbb{P}^n$ и при этом изоморфизме диагонали соответствует нормальная рациональная кривая в $\mathbb{P}^n$.

Задача 4.

а) Докажите, что общий однородный многочлен степени d от двух переменных представляется в виде суммы r d-ых степеней линейных форм если и только если $r \geq \frac{d+1}{2}$.

б) Постройте пример формы степени d от двух переменных, не представимой в виде суммы менее, чем d d-ых степеней линейных форм.

Задача 5. Пусть $f \colon C \to C'$ — морфизм неособой проективной кривой C рода g на неособую проективную кривую C' рода g'.

а) Докажите, что $g \geq g'$.

б) Докажите,что если в а) $g = g' > 1$, то f является изоморфизмом. В частности, всякий нетривиальный эндоморфизм кривой C рода $g \geq 2$ является автоморфизмом.

Задача 6. Найдите все неособые невырожденные линейно нормальные кривые $C \subset \mathbb{P}^n$, для которых существует прямая $l \subset \mathbb{P}^{n*}$, пересекающая двойственную гиперповерхность $C^* \subset \mathbb{P}^{n*}$ ровно в двух точках.

Задача 7. Найдите все эллиптические кривые в $\mathbb{P}^4$, не имеющие трисекущих.

Задача 8. Найдите минимальное возможное значение степени d неособой кривой $C \subset \mathbb{P}^n$ рода g при $g = 2$, $g = 3$ и $g = 4$.

Задача 9. Классифицируйте все невырожденные кривые $C \subset \mathbb{P}^n$, класс которых не превосходит четырёх.

Задача 10. Пусть C — гиперэллиптическая кривая рода g. Опишите все полные линейные системы g^r_d на C при $d \leq g$.

Задача 11. Пусть C — неособая кривая рода g, и пусть $\varphi\colon C \to C$ — автоморфизм, отличный от тождественного. Докажите, что φ имеет не более $2g + 2$ неподвижных точек (т.е. точек $x \in X$ таких, что $\varphi(x) = x$).

Задача 12. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$, $n > 2$ — невырожденная кривая степени d. Докажите, что C содержится в гиперповерхности степени $d - 1$. Найдите все кривые $C \subset \mathbb{P}^n$, которые не содержатся ни в какой гиперповерхности степени $d - 2$.

Задача 13. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — неособая невырожденная линейно нормальная кривая рода g и степени $d \geq 2g + 2$. Докажите, что C задаётся в $\mathbb{P}^n$ квадратичными уравнениями. Остаётся ли это утверждение справедливым, если отказаться от предположения линейной нормальности или от ограничения на степень?