Высший Колледж Математики НМУ
26 сентября 2001
Письменный экзамен

1. Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора $x\dfrac{\partial}{\partial y}+y\dfrac{\partial}{\partial x}$ на пространстве многочленов степени[1] $\leq n$ от x и y.

2. Пусть $n\times n$ - матрицы A и $Б$ таковы, что собственные значения их комбинации $A+tB$ не зависят от t. Вытекает ли из этого, что $Б$ нильпотентна?

3. Есть ли в Mat_n линейное подространство размерности $(n+1)$, состояшее из попарно коммутируюших полупростых матриц?

4. Верно ли, что $U(n)=Sp(2n)\cap O(2n)$ в $GL(2n,\mathbb{R})$?

5. Верно ли, что число неэквивалентных квадратичных форм определителя 1 на $\mathbb{Z}^n$ стремится к бесконечности при $n\to\infty$?

6. Из скольких точек состоит поверхность $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$ в $\mathbf{P}_3$ над полем $\mathbf{F}_4$?

7. В пространстве комплексных симметрических матриц (т.е. квадратичных форм) размера $n\times n$ рассмотрим гиперповерхность V, заданную уравнением $\det X=0$. Докажите, что во всех точках $A\in V$, у которых $\mathrm{rk}\,A=(n-1)$, эта гиперповерхность гладкая (т.е. $\mathrm{grad}\ \det A\neq 0$), причём касательное пространство к V в такой точке A состоит из всех квадратичных форм, аннулирующих ядро A.

8. Имеются семь одинаковых банок, каждая из которых на 9/10 заполнена краской одного из семи цветов радуги (в каждой банке – свой цвет и все цвета разные). Можно ли переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое) получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все семь красок смешаны в равной пропорции?

[1] если общий случай вызывает затруднения, рассмотрите для начала $n=2,3$