ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задачи-2а.

1. Докажите эквивалентность следующих условий

а) Функция f является голоморфной.

б) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = 0$.

в) Форма $f\mathrm{d}z$ замкнута.

г) $\partial^- f = 0$.

д) $\partial^+ \overline{f} = 0$.

2. Пусть $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ — комплексно дифференцируемая функция. Докажите, что

а) Функции $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ удовлетворяют условиям Коши-Римана.

б) 1-формы $u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$ и $v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$ замкнуты.

в) Какие из перечисленных условий влекут комплексную дифференцируемость функции f?

г) При каком условии на функции u и v форма $f\mathrm{d}\overline{z}$ является замкнутой?

3. Докажите, что

а) $f_z(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

б) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = f_{\overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z$.

4. Нарисуйте во что переходит координатная сетка (декартовых и полярных координат) при отображениях

а) $w = z^2$.

б) $w = \dfrac{1}{z-1}$.

в) $w = e^z$.

г) $w = z + \dfrac{1}{z}$.

5. Придумайте такой контур C, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\sin\zeta \, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \neq \sin z.$$

6. Вычислите $\displaystyle\int\limits_C \frac{\sin\zeta \, \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - \frac{\pi}{4})^{2001}}$, где C — это прямоугольник со сторонами параллельными осям координат и координатами вершин главной диагонали $-2002 - 2002\,i$, $2002 + 2002\,i$.

7. (Неравенства Коши.) Пусть функция f голоморфна в замкнутом круге $\{|z - z_0| \le R\}$, причем на границе этого круга $|f(z)| < M$. Докажите, что для коэффициентов a_n разложения функции f в ряд Тейлора справедливы неравенства $|a_n| \le \dfrac{M}{R^n}$.

8. (Теорема Лиувилля.) Докажите, что ограниченная функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbf{C}$ постоянна.

9. (Основная теорема алгебры). Докажите, используя комплексный анализ, что поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто.