Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 7 февраля

1. Дайте определение непрерывной функции двух переменных.

2. Верно ли, что непрерывная по каждой переменной функция непрерывна?

3. Верно ли, что непрерывная по любому направлению функция непрерывна?

Частной производной по x (обозначение: $\frac{\partial f}{\partial x}$) функции $f(x,y)$ двух аргументов называется обычная производная функции одного аргумента x, получаемой фиксированием какого@-либо значения переменной y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Производной функции $f(x,y)$ *по направлению вектора* $\bar a(\alpha,\beta)\neq 0$ (обозначение $\frac{\partial f}{\partial \bar a}(x_0,y_0)$) называется производная функции одной переменной $\varphi(t)=f(x_0+\alpha t,y_0+\beta t)$ при $t=0$.

4. Приведите пример разрывной в точке (x_0,y_0) функции $f(x,y)$, у которой

а) существуют обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$;

б) существует производная по любому направлению $\frac{\partial f}{\partial \bar a}(x_0,y_0)$.

5. Как производная по направлению зависит от выбора вектора направления $\bar a$ и $c\bar a$, $c\in\mathbb{R}$?

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0,y_0), если она в окрестности этой точки отличается от некоторой линейной функции на члены малого порядка:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(r),\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

6. Докажите, что если f и g – дифференцируемые в точке (x_0,y_0) функции двух переменных, то функции $f+g$, fg, λf, $\lambda=\mathrm{const}$, также дифференцируемы в этой точке.

7. Докажите, что дифференцируемость влечет существование частных производных и производных по любому направлению. Выразите константы A и B и производную по направлению $\frac{\partial f}{\partial \bar a}(x_0,y_0)$ через частные производные функции f.

8. Пусть $f(x,y)$ «« функция двух переменных, а $g(t),\varphi(t),\psi(t)$– функции одной переменной. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции для следующих функций:

а) $f(\varphi(t),\psi(t))$;

б) $g(f(x,y))$.

9. Приведите пример разрывной в точке (x_0,y_0) функции, у которой существуют обе частные производные в некоторой окрестности точки (x_0,y_0).

Теорема(простой признак дифференцируемости). *Если все частные производные непрерывны в некоторой точке, то функция в этой точке дифференцируема.*

10. Докажите признак дифференцируемости.

11. Нарисуйте а) линии уровня $z = \mathrm{const}$ и б) графики следующих функций:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}, \quad z = -y^2 + x^2 - x^4, \tag{1}$$

$$z = \sqrt{-y^2 + x^2 - x^4}, \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

$$z = \cos x - y^2, \quad z = \cos x \cos y, \quad z = \sqrt[3]{x^2 + y^4}, \quad z = x^4 + x^2 y^2 + y^5. \tag{3}$$