Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 21 февраля

1. Под каким углом пересекаются гиперболы $x^2 + y^2 = a; \quad xy = b$?

2. Вычислить дифференциалы следующих функций:

а) $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad f(a, b) = a \cdot b, \quad a, b \in \mathbb{R}^n$ (скалярное произведение);

б) $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}, \quad f(A) = \operatorname{tr} A$ (в точке $A = E$);

в) $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}, \quad f(A) = \det A$ (в точке $A = E$);

3. Рассмотрим матрицы $n \times n$ с определителем 1. Докажите, что эти матрицы образуют группу. Рассмотрите матричные кривые, лежащие на этой группе и проходящие через точку E. Найдите касательные вектора к этим кривым.

4. Проделайте то же самое для группы ортогональных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих уравнению $A^{\top} = A$).

Вычистите размерности касательных пространств.

Символ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, состоящий из целых неотрицательных чисел, называется *мультииндексом*. Обозначения:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n; \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!; \tag{1}$$

$$a^\alpha = a^{\alpha_1} \ldots a^{\alpha_n} \quad \text{для } a = (a_1, \ldots, a_n); D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \text{ для } f = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

5. Доказать, что если $k \in \mathbb{N}$, то

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} a^\alpha.$$

6. *Формула Тейлора в мультииндексах.* Докажите, что формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать в виде

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) \Delta x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x + \xi \Delta x) \Delta x^\alpha, \quad \xi \in [0, 1].$$

7. Вычислить

$$\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0, 0) \text{ для } f = \sin(x^2 + y^2).$$

8. Нарисуйте следующие кривые, заданные параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\pm t} \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t^3 - 3t, \\ y = t^4 - t^2. \end{cases} \tag{4}$$