Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 28 февраля

Теорема (о неявной функции). *Пусть частные производные функции F двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0) и пусть $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует и единственна функция $\varphi(x)$, заданная в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, функция φ дифференцируема и ее производная выражается формулой*

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

1. Выведите из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции: *пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда f задает взаимно-однозначное соответствие некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, т.е. функция f обладает обратной функцией $f^{-1}(y)$ ($f^{-1}(f(x)) \equiv x$). Обратная функция дифференцируема и ее производная выражается формулой ${f^{-1}}'(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

2. Пусть $y = y(x)$ ««« заданная функция, $y(x_0) = 0$. Выразите константы разложения $x = x(y) = x_0 + Ay + By^2 + o(y^2)$ через производные функции y.

3. Функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

а) Докажите, что если F бесконечно дифференцируема, то и φ бесконечно дифференцируема.

б) Выразите φ'' через частные производные функции F.

4. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^y = y^x$.

5. Нарисовать график функции $y = y(x)$, заданной уравнением

$$xy + x^3 + y^4 = 0,$$

в окрестности точки $(0, 0)$

6. Нарисуйте следующие кривые. Найдите особые точки, вертикальные и горизонтальные касательные. Найдите несколько членов ряда Тейлора для функций $y(x)$ и $x(y)$ в точке (x_0, y_0).

а) $x^2 + xy + y^2 = 1; \quad (x_0, y_0) = (0, 1);$

б) $x^3 + y^3 = 2xy,\ x^4 + y^4 = 2xy; \quad (x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1);$

в) $(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = 100;$

г) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100.$

7. а) Решить неявное уравнение

$$f = x \cdot e^f$$

и найти первые члены ряда Тейлора.

б) Найти все коэффициенты ряда Тейлора.