Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 7 марта

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть M «««« полное метрическое пространство. Пусть отображение $A : M \to M$ удовлетворяет условию $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$ $\forall x, y$ с некоторой константой $\alpha < 1$. Тогда у отображения A существует и единственна неподвижная точка x ($Ax = x$).*

1. Докажите теорему. Покажите, что для любой начальной точки x_0 выполняется оценка $\rho(A^k x_0, x) \leq s\frac{\alpha^k}{1-\alpha}$, где $s = \rho(Ax_0, x_0)$.

2. Пусть отображение $A : M \to M$ полного метрического пространства M в себя удовлетворяет условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ $\forall x, y$. Верно ли, что у отображения A существует неподвижная точка?

3. Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.001$ имеет корень вблизи нуля. Найдите его первые 5–10 десятичных знаков.

4. Докажите, что система

$$x = (x^2 + y^2)/100, \qquad y = (xy^2 + 0.1)/100$$

имеет решение вблизи нуля. Найдите это решение с точностью до 10^{-10}.

5. Как переписать уравнение $x^2 = 2$, чтобы для его решения можно было применить принцип сжимающих отображений? Годится ли $x = \frac{2}{x}$?

6. Решая уравнение $x^2 - ax + b = 0$, его переписали в виде $x = a - \frac{b}{x}$. При каких a, b, x_0 процесс последовательных приближений сходится? К какому из двух корней (если они есть)?

Для того, чтобы расширить область начальных приближений x_0, при которых итерационный процесс сходится, уравнение переписали в виде $x^2 + cx = (c + a)x - b$ и преобразовали к

$$x = \frac{(c + a)x - b}{x + c}.$$

Как правильно подобрать число c?

7. Докажите, что всякое непрерывное отображение а) отрезка $[0, 1]$, b) диска D^2 в себя имеет неподвижную точку.

8. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных

$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{1 + n^2}; \quad n \in \mathbb{Z},$$

существует и единственно ограниченное.

9. Пусть $\varphi_0(x) = x + \sin x$, $\varphi_1(x) = \varphi_0(\varphi_0(x))$, ..., $\varphi_n(x) = \varphi_0(\varphi_{n-1}(x))$. Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$?