Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 21 марта

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, задаваемое системой уравнений

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_1(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Отображение называется *дифференцируемым* в точке 0, если оно представимо в виде

$$f(x) = Ax + o(||x||),$$

где A «« линейное отображение, матрица которого имеет вид $A = J_f(0) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{x=0}$

Матрицу A (которая называется *якобианом*, можно описать инвариантным образом, это матрица касательного (производного) отображения

$$df : T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{y_0}\mathbb{R}^m.$$

1. Дайте определение df, исходя из различных определений касательных векторов:

а) координатное,

б) как классов эквивалентности кривых,

в) как дифференцирований,

Докажите их эквивалентность.

2. Пусть f и g два отображения: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Докажите, что $d(g \circ f) = dg \circ df$ (т. е. $J_{g \circ f} = J_g J_f$).

3. Докажите, что если существует диффеоморфизм $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, то $m = n$.

4. (Теорема о неявной функции.) Пусть поверхность $M \subset \mathbb{R}^N$ задана системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_N) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots x_N) = 0 \end{cases}$$

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) существует такой набор индексов $i_1, \dots, i_n$, что $\det \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_{i_l}}\right| \neq 0$;

б) ранг $N \times n$ матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ максимален (и равен n);

в) поверхность M можно задать как образ некоторого отображения $\phi : \mathbb{R}^{N-n}(z) \to \mathbb{R}^N(x)$, где ранг матрицы $\left(\frac{\partial x_i}{\partial z_j}\right)$ максимален (и равен $N - n$);

г) существует такая локальная система координат $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$, что поверхность M задается координатной плоскостью $\tilde{x}_1 = \dots = \tilde{x}_N = 0$.

Определение. Поверхность M в этом случае называется *вложенным многообразием* размерности n и коразмерности $N-n$.

5. Пусть число уравнений, задающих M, больше чем n, но $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=n$.

Докажите, что если это условие выполняется в целой области, то M «« многообразие. Приведите пример, когда M не является многообразием, но условие выполнено во всех точках M.

6. Сформулируйте определение: вектор $\xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^N$ касается поверхности M.

Докажите, что совокупность векторов, касающихся M в точке x_0 образует $\dim M$@-мерное векторное пространство.

7. Рассмотрим совокупность $T\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^{2N}$ «« совокупность всех касательных векторов, приложенных во всех точках. Докажите, что $TM\subset T\mathbb{R}^N$ «« вложенное $(2\dim M)$@-мерное пространство.

8. Докажите, что группы $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$ «« подмногообразия в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Найдите размерность T_E и опишите это касательное пространство.

9. Найдите множество точек, в которых ранг df немаксимален. Нарисуйте поле ядер df вдоль этого множества и его образ.

Найдите число прообразов у различных точек.

а) $(x,y)\mapsto(x^2,y)$;

б) $(x,y)\mapsto(x^3+xy,y)$;

в) $z\mapsto z^2$;

г) $z\mapsto z^2+2\bar{z}$;

д) $(x,y)\mapsto(x^2,y^2)$.

10. Исследуйте отображение $(x,y)\mapsto(xy,y,x^2)$.