Высший Колледж Математики

Математический анализ, 1-й курс, 28 марта

1. Пусть $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$ «« функции, определенные уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Вычислить $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$.

2. Пусть

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \tag{1}$$

и $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Вычислить:

а) $f'_x(1,1,1)$, если x, y, z «« независимые переменные;

б) $f'_x(1,1,1)$, если $z = z(x,y)$ задается уравнением (1);

в) $f'_x(1,1,1)$, если $y = y(x,z)$ задается уравнением (1).

3. Вычислить $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где $u = e^{-r}/r$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. Найти множество точек, где необратимо отображение $(x,y) \mapsto (x^2 + y^2, \sin xy)$.

5. Найти выражения в полярных координатах:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

б) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$;

в) $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$;

г) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$.

6. Найти решения уравнений: а) $xy'_y - yu'_x = 0$;

б) $xu'_x + yu'_y = 0$;

в) $u''_{xx} = c^2\, u''_{yy}$.

7. Найти дифференциалы отображений: $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$

а) $A \mapsto A^2$;

б) $A \mapsto A^{-1}$.

8. Рассмотрим отображение

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Найдите якобиан, обратное отображение, образ окружности $(x-a)^2 + y^2 = c^2$.