Высший Колледж Математики

Математический анализ, экзамен, 30 сентября 2001 г.

1. Как расположены относительно друг друга в малой окрестности начала координат поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданные уравнениями

$$z = \ln(1 + x^2 + y^2), \qquad \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + z - x^2 - y^2 - \frac{x^6}{3} - \frac{y^6}{3} = 0 \ ?$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y, z, u) = xyz + yzu + zux + uxy$$

на торе $x^2 + y^2 = z^2 + u^2 = 1$.

3. Найдите эволюту (огибающую семействе нормалей) астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Изобразите на одном рисунке астроиду и ее эволюту.

4. Пусть бесконечно дифференцируемая функция $f(x, y)$ имеет в окрестности нуля вид

$$f = x^3 - y^3 + o(r^3), \qquad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Докажите, что существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что любое решение уравнения $f(x, y) = 0$ в прямоугольнике $\{|x| < \varepsilon, \ |y| < \delta\}$ имеет вид $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$««« дифференцируемая в нуле функция. Чему равна производная $\varphi'(0)$?

5. Пусть $S(x, y) = x^2 + y^2 + \varphi(x - y)$, где φ««« дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на всей прямой и удовлетворяющая неравенству $|\varphi''| \leqslant K < 1$. Докажите, что отображение плоскости на себя, имеющее вид $(x, y) \mapsto (\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y})$, является биекцией.

6. а) При каких a граница ортогональной проекции поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением

$$x^8 + y^8 + z^8 - 2xyz^4 = a$$

на плоскость Oxy касается окружности $x^2 + y^2 = 4$? Изобразите проекцию при этих значениях a.

б) Найдите радиус окружности $x^2 + y^2 = R^2$, касающейся проекции при $a = 0$. Изобразите проекцию в этом случае.