Аффинные группы Вейля и группы Кокстера

Иван Аржанцев

Курс по мотивам глав 4-6 книги J. Humphreys "Reflection groups and Coxeter groups"

проведен в весеннем семестре 2001 года

Задачи к экзамену

Далее (W, S) обозначает произвольную систему Кокстера.

1. Найти все группы Кокстера, в которых каждый элемент имеет единственную редуцированную запись.

2. Доказать, что элементы $s, s' \in S$ сопряжены в W тогда и только тогда, когда существует цепочка $s = s_1, s_2, \ldots, s_k = s'$, для которой порядки элементов $s_i s_{i+1}$ конечны и нечетны.

3. Пусть $\sigma : W \to GL(V)$ – геометрическая реализация группы W. Доказать, что если $\exists w_0 \in W \;:\; \sigma(w_0) = -E$, то группа W конечна.

4. Найти критерий нормальности параболической подгруппы группы Кокстера.

5. Пусть $T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$, $I \subset S$ и $T_I = \bigcup_{w \in W_I} wIw^{-1}$. Доказать, что $T \cap W_I = T_I$.

6. (Теорема Деодхара.) Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – набор целых чисел и $[a_1, \ldots, a_k]$ – этот же набор, упорядоченный по возрастанию. Будем говорить, что $[a_1, \ldots, a_k] \leq [b_1, \ldots, b_k]$, если $a_i \leq b_i \forall i$. Пусть τ_1 и τ_2 – две подстановки порядка n. Доказать, что $\tau_1 \preceq \tau_2$ в порядке Брюа на симметрической группе тогда и только тогда, когда для всех $k = 1, \ldots, n$ имеем
$$[\tau_1(1), \ldots, \tau_1(k)] \leq [\tau_2(1), \ldots, \tau_2(k)].$$

7. Пусть группа W конечна, $\preceq$ – порядок Брюа на W, и w_0 – элемент максимальной длины в W. Доказать, что $u \preceq v$ тогда и только тогда, когда $w_0 v \preceq w_0 u$.

8. Пусть $W_r =< s_1, \ldots, s_r \mid s_i^2 = 1 >$ – универсальная группа Кокстера. Найти все биекции на W_r, сохраняющие порядок Брюа.

9. В группе $PGL_2(Z)$ (как в группе Кокстера с показателями 2, 3, ∞) найти число элементов длины 3.

10. Найти конус Титса для всех аффинных групп Вейля.

11. Найти конус Титса для группы Кокстера $PGL_2(Z)$.

12. Доказать, что конус Титса совпадает со всем пространством тогда и только тогда, когда группа W конечна.

13. Найти центры всех групп Кокстера.

14. Доказать, что группа Кокстера кристаллографична тогда и только тогда, когда все отметки на ее графе Кокстера принадлежат $\{2, 3, 4, 6, \infty\}$ и для любого цикла в графе Кокстера число отметок 4 четно и число отметок 6 четно.

15. Доказать, что группа Кокстера W гиперболична тогда и только тогда, когда ассоциированная билинейная симметрическая форма невырождена и не является положительно определенной, а все графы Кокстера, полученные из исходного удалением одной (произвольной) вершины, имеют положительный тип.

16. Пусть H – конечная подгруппа в W. Доказать, что в W найдется конечная параболическая подгруппа, содержащая подгруппу, сопряженную с H.

17. Доказать, что пересечение подгрупп конечного индекса в группе Кокстера является единичной подгруппой.