ГЛАВА

ТЕОРИЯ ГАЛУА И ТФКП

3. Ряды Пьюзо и теория Галуа

Алгебраические функции одной переменной в окрестности точек ветвления представляются так называемыми рядами Пьюзо. В этом пункте мы рассмотрим проблему представимости функций рядами Пьюзо с точки зрения теории Галуа. Подобное рассмотрение становится особенно полезным при переходе к алгебраическим функциям нескольких переменных.

Ряды Пьюзо. *Рядом Пьюзо с центром в точке* a называется ряд по дробным степеням от $(x-a)$ вида:

$$(*) \qquad \sum_{k\geq m} b_k (x-a)^{k/n},$$

где n — натуральное число и суммирование ведется по множеству целых чисел k больших или равных некоторого (необязательно положительного) числа m. В ряду $(*)$ фигурирует многозначная функция $(x-a)^{k/n}$, поэтому выражение $(*)$ нуждается в комментарии. По определению ряд $(*)$ задает следующую n-значную функция. Разрежем проколотую окрестность точки a лучом, выходящим из этой точки. В разрезанной окрестности многозначная функция $(x-a)^{1/n}$ распадается на n однозначных ветвей. Пусть $u_1(x), \dots, u_n(x)$ — набор из этих ветвей. Ряд $(*)$ определяет n-значную функцию в проколотой окрестности точки a, которая после разрезания области распадается на n ветвей. Эти ветви по определению задаются n рядами

$$\sum b_k u_j^k(x), \quad j=1,\dots,n.$$

Определение. Аналитический росток f_b, $b \in U \setminus a$, называется *ростком алгеброидной функции* в проколотой окрестности $U \setminus a$, если:

1) росток f_b аналитически продолжается вдоль любой кривой $\gamma(t)$, $t(0) = b$, лежащей в области $U \setminus a$;

2) росток f_a определяет в проколотой окрестности $U \setminus a$ конечнозначную функцию (это означает, что существует лишь конечно ечисло различных ростков точки b, которые получаюця из ростка f_b при помощи аналитического продолжения вдоль всевозможных замкнутых кривых в окрестности $U \setminus a$;

3)все ветви многозначной аналитической функции, порожденные ростком f_b, при подходе к точке a растут не быстрее, чем степенным образом.

Справедлива следующая теорема.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Теорема. *Алгеброидная функция в малой окрестности точки a представима сходящимся рядом Пьюзо.*

Ниже мы приведем два доказательства этой теоремы. Оба они основаны на следующем обстоятельстве: фундаментальная группа проколотой окрестности точки a на плоскости изоморфна группе целых чисел относительно сложения. Пусть многозначная функция, порожденная ростком f_b, имеет n ветвей, и пусть γ — кривая в окрестности $U \setminus a$, один раз обходящая вокруг точки a. Занумеруем различные ветви $f_{i,b}$, $i = 1, \ldots, n$, нашей многозначной функции в точке b таким образом, что при $i < n$ аналитическое продолжение ростка $f_{i,b}$ вдоль кривой γ приводит к ростку $f_{i+1,b}$, а аналитическое продолжение ростка $f_{n,b}$ вдоль этой кривой приводит к ростку $f_{1,b}$.

Первое доказательво теоремы. Рассмотрим отображение проколотой окрестности точки ноль в проколотую окрестность точки a, заданное формулой

$$x(z) = z^n + a, \tag{**}$$

и пусть c — один из прообразов точки b при этом отображении. Росток g_c полученный из ростка f_b при этом отображении будет, очевидно, ростком алгеброидной функции в проколотой окрестности нуля. Эта алгеброидная функция будет однозначной в проколотой окрестности нуля. Действительно, кривая γ_1, один раз обходящая точку нуль, при отображении (**) перейдет в кривую γ^n, n раз обходящую точку a. При продолжении вдоль кривой γ^n росток $f_{1,b}$ перейдет в ростон $f_{n,b}$, но $f_{n,a} = f_{1,a}$. Именно поэтому росток g_c будет ростком однозначной функции в проколотой окрестности нуля. Однозначная алгеброидная функция мероморфна, т.к. обнозначная функця растущаы не быстрее чем степенным образом при подходе к изолированной особой точке, в этой точке либо имеет полюс, либо неособа. Всякая мероморфная функция раскладывается в ряд Лорана. Поэтому функция представима в виде

$$g(z) = \sum_{k \geq m} b_k z^k.$$

Возвращаясь к функции f, получаем

$$f(x) = \sum_{k \geq m} b_k (x - a)^{k/n}.$$

(Здесь мы воспользовались соотношением $z^n = x - a$.)

Второе доказательво теоремы. Пусть L — линейное пространство, натянутое на все ростки $f_{1,b}, \ldots f_{n,b}$ функции f в точке b. Кривой γ, обходящей вокруг точки a соответствует оператор монодромии $A\colon L \to L$, удовлетворяющий тождеству $A^n = E$. Согласно утверждению 2 пункта 2.1 росток $f_b = f_{1,b}$ представим в виде среднего арифметического своих резольвент Лагранжа относительно отображения A:

$$f_b = \frac{1}{n} \sum_{\xi^n = 1} R_\xi, \tag{***}$$

где $R_\xi = \sum_{1\le k\le n} \xi^k f_{k,b}$ и суммирование ведется по всем корням ξ n-й степени из единицы. Далее, резольвента лагранжа R_ξ является собственным вектором оператора монодромии A с собственным числом $-\xi$. Пусть ξ равно $\exp(-2\pi ik/n)$. Простейшей функцией, являющейся собственным вектором оператора моводромии A с собственным числом $-\xi$, является функция $(x-a)^{k/n}$. Отношение $g_k = R_\xi/(x-a)^{k/n}$ является однозначной функцией в области $U \setminus a$. Действительно, при обходе вокруг точки a резольвента Лагранжа $R_\xi(x)$ и функция $(x-a)^{k/n}$ одновременно умножаются на один и тот же множитель $(-\xi)$, поэтому их отношение $g_k(x)$ не меняется. Итак, $R_\xi(x) = (x-a)^{k/n} g_k(x)$, где $g_k(x)$ — однозначная и, следовательно, мероморфная функция в области U. Соотношение $(***)$ можно теперь переписать в виде

$$(****) \qquad f(x) = \sum_{1\le k\le n} (x-a)^{k/n} \frac{1}{n} g_k(x),$$

где $\frac{1}{n} g_k(x)$ — мероморфные функции в области U, являющиеся голоморфными в области $U \setminus a$. Существование оредставления функции f в виде $(****)$ влечет за собой существование ее представления в виде ряда Пьюзо. Действительно, представление $(****)$ справедливо во всей области U. В любом круге V с центром в точке a, содержащемся в области U, функтсии $\frac{1}{n} g_k(x)$ представляются сходящимися рядами Лорана по переменной $x-a$. Раскладывая в круге V функции $\frac{1}{n} g_k(x)$ в ряды Лорана, получим представление функции $f(x)$ в круге V сходящимся рядом Пьюзо.

Мы видим, что уже для функции одной переменной второе рассуждение приводит к более сильному результату. Впрочем и для случая функции многих переменных первое рассуждение тоже оказывается полезным.