ГЛАВА

ТЕОРИЯ ГАЛУА И ТФКП

6. Алгебраические функции многих переменных

Многие определения свойства алгебраических функций одной переменной почти дословно переносятся на случай нескольких переменных. Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, и $x = x_1, \dots, x_n$ — точка этого пространства.

Определение. Росток $y_a(x)$ аналитической функции в точке a пространства $\mathbb{C}^n$ называется *ростком алгебраической функции*, если он удовлетворяет некоторому уравнению

$$P(x,y) = p_0(x)y_a^n + p_1(x)y_a^{n-1} + \dots + p_n(x) = 0, \tag{1}$$

в котором $p_i(x)$ — полиномы от нескольких переменных $x = x_1, \dots, x_n$.

Уравнение (1) можно считать неприводимым. Действительно, если $P(x,y) = P_1(x,y)P_2(x,y) = 0$, то либо $P_1(x, y_a(x)) \equiv 0$, либо $P_2(x, y_a(x)) \equiv 0$. Обозначим через $D(x)$ дискриминант уравнения (1). Полином $D(x)$ и старший коэффициент $p_0(x)$ обращаются в нуль на алгебраических гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^n$. Обозначим эти гиперповерхности, соответственно, через O_1 и O_2. Значительно легче иметь дело не с аффинным пространством $\mathbb{C}^n$, а сего проективной компактификацией $\mathbb{C}P^n$. Пространство $\mathbb{C}^n$ естественно вложено в свою проективную компактификатсию $\mathbb{C}P^n$. Обозначим через O дивизор в пространстве $\mathbb{C}P^n$, являющийся объединением гиперповерхностей O_1 и O_2, к которому добавлена бесконечно удаленая гиперплоскость. Дивизор O (как и всякий другой дивизор) в окрестности каждой своей точки задается некоторым аналитическим уравнением $f(x) = 0$. Перечислим свойства ростка алгебраической функции.

Утверждение 1. *1. При подходе к точкам дивизора O функция $y(x)$ растет не быстрее чем степеным образом, т.е. для всякой точки $o \in O$ существуют вещественные константы c и α такие, что всякое значение $y(b)$ многозначной аналитической функции в точке b, где b — достаточно близкая точка к точке o удовлетворяет неравенству $|y(b)| \le c|f(b)|^\alpha$, где $f(x)$ — аналитическая функция в окрестности точки o такая, что уравнение $f(x) = 0$ определяет дивизор O в окрестности точки o.*

2. Росток $y_a(x)$ аналитически продолжается вдоль любой вещественной кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0) = a$, не пересекающей множество O при $t > 0$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. Многозначная аналитическая функция, определенная ростком $y_a(x)$, в каждой точке имеет не более чем n различных значений.

Доказательство. 1. Каждый корень y алгебраического уравнения

$$(*) \qquad p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_n = 0,$$

с комплексными коэффициентами p_i и ненулевым старшим коэффициентом $p_0 \neq 0$, для которого $|y| > 1$, хотя бы для одного k, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяет неравенству $|y|^k \leq |p_k/p_0|/n$. Каждая из рациональных функций $p_k(x)/p_0(x)$ при подходе к точкам дивизора O растет степенным образом, откуда и вытекает нужное утверждение.

2. Если $x \notin O$ и точка (x, y) удовлетворяет уравнению (1) $P(x, y) = 0$, то в точке (x, y) частная производная $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ не обращается в нуль. Действительно, в точке x, для которой уравнения $P(x, y) = 0$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$ совместны и старший коэффициент $p_0(x)$ не обращается в нуль, дискриминант $D(x)$ равен нулю. Поэтому для всякого решения уравнения $P(x, y) = 0$, лежащего над точкой $x \notin O$ выполнено условие теоремы о неявной функции. Всякую ветку $y(x)$ решения этого уравнения можно аналитичести продолжать до тех пор, пока точка x не попадает в дивизор O. Действительно, согласно пункту 1 в дополнении к любой окрестности дивизора O все значения многозначной функции $y(x)$ ограничены и поэтому ни одна из ветвей этой функции не уходит в бесконечность.

3. Аналитическое продолжение ростка $y_a(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Алгебраическое уравнение (1) при фиксированном значении x имеет не более n решений, откуда вытекает нужное утверждение.

Покажем, что всякая многозначная аналитическая функция на пространстве $\mathbb{C}P^n$, удовлетворяющая условиям утверждения 1, является алгебраической.

Утверждение 2. *Если для ростка $y_a(x)$ существует дивизор O такой, что росток y_a и дивизор O удовлетворяют условиям утверждения 1, то найдется полином $P(x, y)$ такой, что $P(x, y_a(x)) \equiv 0$.*