EMBEDDINGS OF CONTINUA INTO THE PLANE

A. Skopenkov

Abstract. In these (unfinished) notes we present classical results on embedding and isotopy problems for graphs, 2-polyhedra and continua in the plane. Some of these results are unfortunately not so well-known, e.g. Exercise 5 of §1, Theorems 1.2 and 2.1. Embeddings of continua into the plane recently attracted much attention in the theories of dynamical systems [Zhi], Chebyshev systems [Kos] and superpositions and Hilbert's 13th problem (see §§3,4). Each section contains exercises marked by smaller letters and bold numbers.

Повторяя слова,
Лишенные всякого смысла,
Но без напряженья...
Б.Гребенщиков, 'Плоскость.'

1. Embeddings and isotopy of graphs in the plane

The three classical main problems of geometric topology are the problems of homeomorphism, embedding and isotopy. An *embedding* is a homeomorphism onto its image. An *isotopy* of an embedding is a continuous deformation of this embedding in the class of embeddings.

0. a) Construct a continuous injection which is not an embedding.

b) A continuous injection from a compactum is an embedding.

The homeomorphism problem for graphs is solved by the following exercise (in the sense that no better general homeomorphism criteria exist).

1. Два графа являются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому операциями *подразделения ребра* (рис. 1.1) и обратными к ним.

Figures 1.1 and 1.2 approximately here

In this section we present the solution of the homeomorphism and the isotopy problems for graphs in the plane.

2. Графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 1.2) не являются плоскими.

3. (Менгер, 1920-е) Граф, степень каждой вершины которого равна 3, является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу $K_{3,3}$.

Теорема 1.1 Куратовского. *Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 1.2) [Kur30].*

Перед тем, как привести набросок простого доказательства теоремы Куратовского [Tho81, Mak97], сформулируем несколько задач.

Figures 1.3 and 1.4 approximately here

4. (относительная версия теоремы Куратовского) Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует вложение $G \to \mathbb{R}^2$, при котором C — граница некоторой грани. Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда C не содержится в подграфе графа G, как на рис. 1.3.a или 1.3.b (указание: используйте теорему Куратовского).

5. Граф G с заданными циклами ребер, выходящих из одной вершины, можно вложить в плоскость, чтобы указанные циклы шли по часовой стрелке, тогда и только тогда, когда G не содержит 'восьмерки' или 'буквы θ' с циклами, изображенными на рис. 1.4 (указание: не используйте теорему Куратовского).

6. Можно ли нарисовать без самопересечений следующие графы:

a) K_5 на торе? b) $K_{3,3}$ на листе Мебиуса? c) K_5 на сфере? d) K_5 на цилиндре (в кольце)? e)* K_9 на торе?

7. Любой граф можно нарисовать без самопересечений

a) в пространстве. b) на сфере с некоторым количеством ручек, зависящим от конкретного графа.

c) в книжке с некоторым количеством страниц, зависящим от графа. d) в книжке с 3 страницами.

8. Лист Мебиуса и тор с дыркой (и любую поверхность с краем) можно вырезать из книжки с 3 страницами.

9. Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой *одной* грани тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, гомеоморфного θ (т. е. букве θ).

Figure 1.5 approximately here

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Набросок доказательства теоремы Куратовского (детали оставляем читателю в качестве задач). Операции *удаления ребра* $G \to G - e$, *стягивания ребра* $G \to G/e$ и *удаления вершины* $G \to G - x$ определены на рис. 1.5. Граф, полученный из графа G произвольной последовательностью указанных операций, называется *минором* графа G.

Лемма. a) Минор плоского графа плоский.

b) Граф G не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$ $\Leftrightarrow$ граф G не имеет минора, изоморфного K_5 или $K_{3,3}$.

Пусть G — минимальный в смысле миноров неплоский граф. Из Леммы вытекает, что для доказательства теоремы Куратовского достаточно показать, что G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.

Замечание. G не имеет вершин степени 1 или 2.

Основная Лемма. Для любого ребра xy графа G граф $G - x - y$

a) не содержит подграфа, гомеоморфного θ.

b) не содержит двух висячих вершин.

c) гомеоморфен окружности.

Доказательство утверждения (a). Нарисуем на плоскости без самопересечений минор G/xy графа G (рис. 1.6.a). Покрасим в белый цвет ребра графа G/xy, выходящие из вершины xy. Сотрем белые ребра и покрасим в черный цвет границу грани получившегося графа $G/xy - xy$, содержащую вершину xy. Так как $G/xy - xy = G - x - y$, то достаточно доказать, что в графе G/xy все ребра либо белые, либо черные. Пусть это не так. Если бы объединение черных ребер было бы деревом, то красных ребер не было бы. Поэтому найдется цикл C из черных ребер, относительно которого (не уменьшая общности) вершина xy лежит внутри, а некоторое еще не покрашенное ребро — вне. Покрасим в красный цвет все ребра графа G/xy, лежащие вне цикла C. Оставшиеся ребра графа G/xy покрасим в оранжевый цвет.

Построенная раскраска графа G/xy порождает раскраску графа G (ребро xy красится в белый цвет). Граф $G - R$, полученный из графа G удалением красных ребер, можно нарисовать на плоскости без самопересечений (рис. 5.b). Можно считать, что белые ребра xy лежат внутри черного цикла C. Поскольку объединение B черных ребер — граница грани, то оно не содержит θ. Значит, каждая компонента связности графа $B - C$ пересекается с C не более чем по одной точке. Поэтому можно перекинуть каждую компоненту связности графа $B - C$ внутрь C. Будем считать далее, что $B - C$ лежит внутри C. А значит, и все оранжевые ребра лежат внутри C. Нарисовав красные ребра вне C, как на рис. 1.6.a, получим вложение графа G в плоскость. Полученное противоречие доказывает, что $G - x - y$ есть граница грани и поэтому не содержит θ.

Figures 1.6 and 1.7 approximately here

Указания к (b) и (c). Используйте (a) и Замечание. Докажите сначала, что $G - x - y$ не гомеоморфен ни графу на рис. 1.7.a, ни графу на рис. 1.7.b.

Окончание доказательства теоремы Куратовского. Пусть xy — произвольное ребро графа G. По Замечанию, любая вершина цикла $G - x - y$ соединена либо с x, либо с y. Если вершина u цикла $G - x - y$ соединена с x и не соединена с y, то соседняя с u вершина v цикла не соединена с x (поскольку в противном случае граф $G - vx$ планарен по минимальности графа G, значит, мы можем добавить ребро vx к вложенному в плоскость графу $G - vx$ и получить вложение в плоскость графа G). Поэтому либо любая вершина цикла $G - x - y$ соединена в G и с x, и с y, либо вершины цикла $G - x - y$, соединенные с x и соединенные с y, чередуются вдоль этого цикла. В первом случае $G = K_5$, во втором $G = K_{3,3}$. $\square$

Кроме теоремы Куратовского, существует много других критериев планарности графов. Некоторые из них являются маломерными аналогами критериев вложимости, обсуждаемых ниже. Список запрещённых подграфов для вложимости графа в $\mathbb{R}P^2$ содержит целых 103 графа [GHW79]. Даже существование такого конечного списка для произвольной поверхности имеет очень длинное доказательство [ArHu89, RoSe90].

Теорема 1.2 Эдкиссона-Маклейна. *Два вложения $f, g : N \to \mathbb{R}^2$ связного графа N (или даже 2-полиэдра, или даже пеановского континуума, см. §2) изотопны тогда и только тогда, когда N не содержит триода T или окружности S^1, для которых пары $\{f|_T, g|_T\}$ или $\{f|_{S^1}, g|_{S^1}\}$ таковы, как на рис. 1.8 [McAd41].*

Figures 1.8 and 1.9 approximately here

10. a) Докажите теорему Эдкиссона-Маклейна

b) Сформулируйте и докажите аналог этой теоремы для вложений в сферу.

11. (Уитни, 1932) Граф называется $\le k$*-связным*, если он остается связным после удаления любых k ребер.

a) Любой трехсвязный граф (например, любой граф многогранника) однозначно вкладывается в сферу.

b) Любое вложение двусвязного графа в сферу может быть получено из любого другого 'переворачиваниями блоков' (рис. 1.9).

c) Определите операции, при помощи которых можно получить любое вложение односвязного ($\Leftrightarrow$ связного) графа в сферу из любого другого.

12. Любое вложение графа (или даже поверхности с краем) $N \subset \mathbb{R}^3$ изотопно вложению, образ которого лежит в 'книжке' с тремя страницами $T \times I \subset \mathbb{R}^3$.

2. Embeddability of 2-polyhedra and continua into the plane

A polyhedron is a topological space representable as a simplicial complex (or as a CW-complex). *A triangulation* of a polyhedron is its representation as a simplicial complex.

Theorem 2.1. *A finite 2-polyhedron embeds into S^2 if and only if it does not contain any of the three subpolyhedra K_5, $K_{3,3}$ and U (figures 1.2 and 2.1) [HaJu64, MaSe66].*

Figures 2.1 and 2.2 approximately here

A continuum is a compact connected space. A continuum N is *peanian*, if one of the following equivalent conditions hold: N is locally arcwise connected $\Leftrightarrow$ N is locally connected $\Leftrightarrow$ N is continuous image of an arc.

Theorem 2.2. *A peanian continuum embeds into S^2 if and only if it does not contain any of the four subcontinua K_5, $K_{3,3}$, P' and Q' (figure 2.2) [Cla34, Cla37].*

Let us define the continua P' and Q'. Let P be the graph obtained from K_5 by deleting the interior of an edge ab. Let $\{P_n\}$ be a null-sequence of copies of P, converging to a point $x \notin \coprod\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Denote points of P_n corresponding to a and b by a_n and b_n. Let $\{I_n\}$ be a null-sequence of arcs, joining $b_n \in P$ to $a_{n+1} \in P_{n+1}$ and converging to the same point $x \notin \coprod\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Then $P' = I \cup_{0=x} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (P_n \cup I_n)$. The continuum Q' is defined analogously, replacing K_5 by $K_{3,3}$ and P by Q.

1. Prove non-embeddability in Theorem 2.2.

2. Prove that Theorem 2.2 is false for 1-dimensional non-peanian continua.

From Theorem 2.2 it follows that *any contractible 1-dimensional peanian continuum embeds into the plane.*

Example 2.3. *There exists a contractible continuum, non-embeddable into $\mathbb{R}^2$.*

Example 2.3 is a folklor result of 1930s. We present two its short modern proofs. The first is completely elementary [CRS98, KoSk99]. The advantage of the second proof is that it works also for the higher-dimensional analogue of Example 2.3 [RSS95, proof of Corollary 1.5, ReSk01].

First proof of Example 2.3. $\square$

The above argument also provides a short proof of the Moore theorem stating that *the plane $\mathbb{R}^2$ does not contain an uncountable collection of pairwise disjoint triods* [RSS95'].

The second proof is based on the following Borsuk-Ulam Theorem (the proof is an exercise). A map $f : S^n \to S^m$ between spheres is *equivariant*, if $f(-x) = -f(x)$ for each $x \in S^n$.

The Borsuk-Ulam Theorem 2.4. *(a) Every equivariant map $S^1 \to S^1$ is not null-homotopic.*

(b) There are no equivariant maps $S^2 \to S^1$.

(c) For any map $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ there exists $x \in S^2$ such that $f(x) = f(-x)$.

Second proof of Example 2.3. Let T be a triod. Let $N = T \times (0 \cup \{\frac{1}{k}\}) \cup x \times [0,1]$, where $x \in T$. Clearly, N is contractible.

Suppose that there existed an embedding $f : N \to \mathbb{R}^2$. There exist a map $\varphi : S^1 \to T$ which does not identify antipodal points. Then we could define a map $\psi : S^1 \to T \times T$ by $\psi(s) = (\varphi(s), \varphi(-s))$. Since φ does not identify antipodal points, it would follow that $\psi S^1 \cap \operatorname{diag} T = \emptyset$. Hence we could define maps

$$g_0 : \psi S^1 \to S^1 \text{ by } g_0(x,y) = \frac{f(x,0) - f(y,0)}{|f(x,0) - f(y,0)|} \quad \text{and} \quad g_k : T \times T \to S^1 \text{ by } g_k(x,y) = \frac{f(x,0) - f(y,\frac{1}{k})}{|f(x,0) - f(y,\frac{1}{k})|}.$$

The maps ψ, g_0 and g_k would be equivariant with respect to involutions on $\psi S^1 \subset T \times T$ and S^1, exchanging factors and antipodal points, respectively. Since $|\psi S^1, \operatorname{diag} T| > 0$, it would follow that for sufficiently large k and a point $(x,y) \in \psi S^1$, the points $g_0(x,y)$ and $g_k(x,y)$ would be close and hence could not be antipodal. Therefore $g_0 \simeq_{eq} g_k|_{\psi S^1}$. But $g_k|_{\psi S^1}$ extends to a contractible space $T \times T$ and therefore is null-homotopic. Hence $g_0 : \psi S^1 \to S^1$ is null-homotopic. Thus the map $g_0 \circ \psi : S^1 \to S^1$ is equivariant and null-homotopic, which contradicts the Borsuk-Ulam Theorem. So N cannot embed into $\mathbb{R}^2$. $\square$

Let $\widetilde{N} = \{(x,y) \in N \times N \mid x \neq y\}$ be *the deleted product* of N. Let $\mathbb{Z}_2$ act on $\widetilde{N}$ and on S^{m-1} by exchanging factors and antipodes respectively. If $f : N \to \mathbb{R}^m$ is an embedding, then there exists an equivariant map $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to S^{m-1}$, defined by $\widetilde{f}(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{|f(x)-f(y)|}$. The existence of an equivariant map $\Phi : \widetilde{N} \to S^{m-1}$ implies embeddability of N in $\mathbb{R}^m$ under certain conditions [Hae63, ReSk96, §6, ReSk99, §4, Sko]. Thus it is interesting to know whether such a result holds for embeddings of continua into the plane.

Corollary 2.5. *If N is a 2-polyhedron (or even a peanian continuum) and there exists an equivariant map $\Phi : \widetilde{N} \to S^1$, then N embeds into $\mathbb{R}^2$ [Wu65, SSS98, Sko98].*

Proof. We deduce Corollary 2.5 from Theorems 2.1 and 2.2. For a triangulation T of N denote $\widetilde{T} = \{\sigma \times \tau \in T \times T \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}$. In this paragraph we replace $\widetilde{N}$ to $\widetilde{T}$, where T is its 'minimal' triangulation (defined in an obvious manner for each particular case). In order to prove Corollary 2.5 for graphs N, it suffices to prove that $\widetilde{K_5}$ and $\widetilde{K_{3,3}}$ are spheres with 10 and 6 handles, respectively (with the obvious involutions). In order to prove Corollary 2.5 for 2-polyhedra N, it suffices to prove additionaly that $\widetilde{U} \simeq_{eq} S^2$.

3. Prove the above statements.

In order to prove Corollary 2.5 for peanian continua N, it suffices to prove that there are no equivariant maps $\widetilde{P'} \to S^1$ and $\widetilde{Q'} \to S^1$. We prove this for $\widetilde{P'}$ (for $\widetilde{Q'}$ the proof is analogous). Suppose to the contrary that $\Phi : \widetilde{P'} \to S^1$ is an equivariant map. Take any embedding $P \to \mathbb{R}^2$ and let S be a circle in P whose image separate a and b. Denote by S_n the corresponding circle of P_n.

Since S_n converges to x, it follows that $\Phi|_{S_n \times 1}$ is 'close' to $\Phi|_{0\times 1}$ and hence homotopic to the constant map $*$ for sufficiently large n. Taking a subsequence of $\{P_n\}$ we may assume that $\Phi|_{S_n \times 1} \simeq *$ for each n. Since $\Phi|_{S_n \times t}$ is a 'homotopy' between $\Phi|_{S_n \times 0}$ and $\Phi|_{S_n \times 1}$, we have that $\Phi|_{S_n \times 0} \simeq *$. Since S_n converges to x, it follows that $\Phi|_{S_n \times S_m} \simeq *$ for each n and sufficiently large m. Taking a subsequence of $\{P_n\}$ we may assume that $\Phi|_{S_1 \times S_2} \simeq *$ and $\Phi|_{S_2 \times S_3} \simeq *$. Hence $\Phi|_{b_1 \times S_2} \simeq *$, therefore $\Phi|_{a_2 \times S_2} \simeq *$. Analogously $\Phi|_{S_2 \times b_2} \simeq *$. Let J_2 be an arc joining a_2 to b_2 and such that $J_2 \cap P_2 = \{a_2, b_2\}$ (then $P_2 \cup J_2 \cong K_5$). Since $\Phi|_{S_2 \times a_2}$ and $\Phi|_{S_2 \times b_2}$ are 'homotopic', it folows that $\Phi|_{\widetilde{P_2}}$ equivariantly extends over $\widetilde{P_2} \cup S_2 \times J_2 \cup J_2 \times S_2 \cong_{eq} \widetilde{K_5}$, which is a contradiction. $\square$

There also exists a continuum, which locally embeds into the plane but globally does not embed in any surface. This is *the Vietoris-van Danzig 2-adic solenoid*, first appeared in the theory of dynamical systems. It is the intersection of an infinite sequence of filled-tori, each of them inscribed into the previous one with degree 2.

Example 2.6. *The 3-adic solenoid Σ does not embed in $\mathbb{R}^2$, although there exists an equivariant map $\Phi : \widetilde{\Sigma} \to S^1$ [Sko98].*

Construction of an equivariant map $\widetilde{\Sigma} \to S^1$. Let $S^1 = \{x \in \mathbb{C} \ : \ |x| = 1\}$. Denote

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \dots) \ : \ x_i \in S^1, x_{i+1}^3 = x_i\},$$

$$\tilde{\Sigma} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \ : \ x_i, y_i \in S^1, \ x_{i+1}^3 = x_i, \ y_{i+1}^3 = y_i \text{ for each } i \text{ and } x_i \neq y_i \text{ for some } i\}$$

$$\text{and} \qquad U_n = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \tilde{\Sigma} \ : \ |x_n, y_n| > 4^{-n}\}$$

with the Tikhonov topology. Since $|x_n, y_n| \le 3|x_{n+1}, y_{n+1}|$ for each n, it follows that $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ and $\tilde{\Sigma} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Since U_n is open, it suffices to construct a sequence of equivariant maps $R_n : U_n \to S^1$ such that $R_n = R_{n+1}|_{U_n}$. Let $\widetilde{S^1_\varepsilon} = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \ : \ |x, y| \ge \varepsilon\}$. It suffices to construct a sequence of equivariant maps

$$r_n : \widetilde{S^1_{4^{-n}}} \to S^1 \quad \text{such that} \quad r_n(x^3, y^3) = r_{n+1}(x, y) \quad \text{whenever} \quad (x^3, y^3) \in \widetilde{S^1_{4^{-n}}}.$$

We shall construct such maps r_n successively [cf. ReSk98, Example 1.3]. Let $r_0 : \widetilde{S^1_1} \to S^1$ be an arbitrary equivariant map. Suppose that r_{n-1} is already constructed. For an arc $M \subset S^1$ with end points a and b let $A(M) = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid \arg \frac{x}{y} \in M\}$ be the annulus with boundary circles $A(a)$ and $A(b)$. Denote $\varepsilon = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$. Using the condition $r_n(x, y) = r_{n-1}(x^3, y^3)$ we can define the map r_n on the union of the three annuli (white on figure 2.3)

$$A[\varepsilon; \frac{2\pi}{3} - \varepsilon] \cup A[\frac{2\pi}{3} + \varepsilon; \frac{4\pi}{3} - \varepsilon] \cup A[\frac{4\pi}{3} + \varepsilon; 2\pi - \varepsilon].$$

Since the restrictions of r_n onto the circles $A(3\varepsilon)$ and $A(2\pi - 3\varepsilon)$ are homotopic, it follows that the restrictions of r_{n+1} onto the circles $A(\frac{2\pi}{3} - \varepsilon)$ and $A(\frac{2\pi}{3} + \varepsilon)$ are homotopic. Therefore r_n extends over $A[\frac{2\pi}{3} - \varepsilon, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon]$. Hence r_n equivariantly extends over $\widetilde{S^1_{4^{-n}}}$. We take as $r_n : \widetilde{S^1_{4^{-n}}} \to S^1$ any such extension. $\square$

Figure 2.3 approximately here

Conjecture 2.7. *There exist a non-planar tree-like continuum N for which there is an equivariant map $\widetilde{N} \to S^1$.*

The example of p-adic solenoid ilustrates *inverse limits approach* to embeddability of continua into the plane.

3. 13-

Пусть дана система функций $\{f_i : X^{n_i} \to X\}$, где X — произвольное топологическое пространство. Определим индуктивно понятие *суперпозиции* функций из данной системы :

1) любая функция f_i является суперпозицией функций из $\{f_i\}$;

2) если функции $g_1, \dots, g_{n_i}$ являются суперпозициями функций из $\{f_i\}$, то функция $f_i(g_1, \dots, g_{n_i})$ есть суперпозиция функций из $\{f_i\}$.

Например, полином $\sum a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ есть суперпозиция функций $f(x,y) = x+y$, $g(x,y) = xy$ и $h(t) = t$. Причем g можно исключить, так как $xy = \exp(\ln x + \ln y)$ для $x, y > 0$.

Рассмотрим следующие вопросы для непрерывных действительнозначных функций:

1. Можно ли каждую функцию нескольких аргументов записать в виде суперпозиции функций не более чем двух аргументов?

2. Можно ли каждую функцию двух аргументов записать как суперпозицию функций одного аргумента и нескольких функций двух аргументов, взятых из некоторого фиксированного (и не очень большого) семейства функций двух аргументов?

Аппроксимационная теорема Вейерштраса показывает, что функция нескольких аргументов может быть равномерно приближена на компактном множестве полиномами, а значит и суперпозициями функций одного аргумента и сложения.

Гильберт полагал, что для точных представлений это невозможно. Он сформулировал свою 13-ю проблему так: " Доказать, что уравнение седьмой степени $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ неразрешимо в терминах функций не более чем двух аргументов." Функцию $x(a,b,c)$, выражающую решение уравнения седьмой степени, Гильберт выбрал не случайно. Было известно, что алгебраическое уравнения n-й степени сводится (при помощи радикалов) к такому, у которого коэффициэнты при x^n и x^0 равны 1, а при x^{n-1}, x^{n-2} и x^{n-3} равны 0 (таким образом, остается $n-4$ переменных коэффициэнта). Кроме того, после доказательства Абелем и Галуа неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени выше 4, было доказано, что решение последнего уравнения выражается через тэта-функцию $n-4$ аргументов [PrSo95]. Таким образом, выбранная Гильбертом функция трех переменных — 'первая' из тех, выражение которой через функции меньшего числа переменных не было известно.

Витушкин доказал, что не каждая r раз непрерывно дифференцируемая функция допускает представление в виде суперпозиции функций меньшей степени гладкости [Vit54]. А положительный ответ на наши вопросы опровергает гипотезу Гильберта. Такой ответ был дан в 1957 году Арнольдом и Колмогоровым [Kol57, Arn62]. В том же году Колмогоров доказал даже гораздо больше, а именно:

Суперпозиционная теорема Колмогорова–Арнольда 3.1. *[Kol57, Arn62] Для каждого $n > 1$ существует $2n+1$ таких непрерывных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1} : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$, что любая непрерывная функция $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ представляется в виде*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(\varphi_1(x_1, \dots x_n)) + \dots + g_{2n+1}(\varphi_{2n+1}(x_1, \dots, x_n))$$

для некоторых непрерывных функций $g_1, \dots, g_{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Более того, функции φ_i можно выбрать в виде $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{i1}(x_1) + \dots + \varphi_{in}(x_n)$ для некоторых непрерывных функций $\varphi_{ij} : [0,1] \to \mathbb{R}$ (выбираемых перед заданием f и выбором g_i).

Заметим что функции φ_{ij} (а, значит, и φ_i) фиксированы заранее и только функции g_i зависят от f. Замечательное изложение доказательства Суперпозиционной теоремы Колмогорова–Арнольда находится в [Arn58].

Рассмотрим вопросы, связанные с этим выдающимся результатом Колмогорова–Арнольда. Начнем с аналитических задач. Например, насколько гладкими могут быть выбраны функции φ_{ij} ? Лорентц показал, что можно выбрать эти функции одновременно удовлетворяющими условию Lip_α при всех $\alpha < 1$ [Lor65]. Фридман доказал то же самое для $\alpha = 1$ [Fr67]. Из теорем Витушкина и Хенкина следует, что теорема типа Колмогорова неверна (даже без части 'более того' и если число функций φ_i не ограничено числом $2n+1$), если требовать непрерывную дифференцируемость φ_i [ViHe67]. За дальнейшей информацией отсылаем читателя к [Lor76, Lor77].

Теперь рассмотрим топологические задачи. Остранд заметил, что теорема Колмогорова–Арнольда обобщается на произвольные метрические пространства [Ost65].

Теорема 3.2. *[Ost65] Пусть $X_1, \dots, X_m$ — конечномерные метрические пространства. Положим $n = \dim X_1 + \dots + \dim X_m$ и $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Тогда существуют непрерывные функции $\{\varphi_{ij} : X_j \to \mathbb{R}\}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, $j = 1, \dots, m$, такие что для функций $\varphi_i(x_1, \dots, x_m) = \varphi_{i1}(x_1) + \dots \varphi_{im}(x_m)$ и любой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ существуют непрерывные функции $g_1, \dots, g_{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(\varphi_1(x_1, \dots x_n)) + \dots + g_{2n+1}(\varphi_{2n+1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Теоремы Колмогорова-Арнольда и Остранда мотивируют следующее определение. Пусть X — топологическое пространство и $\varphi_1, \dots, \varphi_k : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Отображение $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k : X \to \mathbb{R}^k$

назовем *базисным*, если каждая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ представляется в виде $f(x) = g_1(\varphi_1(x)) + \dots + g_k(\varphi_k(x))$ для некоторых непрерывных функций $g_1, \dots, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пространство X называется *базисно вложимым* в $\mathbb{R}^n$, если существует базисное отображение $X \to \mathbb{R}^n$.

Таким образом, функции $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}$ в теоремах Колмогорова–Арнольда и Остранда определяют базисное отображение $[0,1]^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ и $X \to \mathbb{R}^{2n+1}$, соответственно. Поскольку для любых различных $x, y \in X$ существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}^n$, разделяющая их, то базисное отображение является вложением. Итак, ослабленная версия теоремы Колмогорова-Арнольда (без 'более того') утверждает, что n-мерный куб базисно вложим в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Из теоремы Остранды вытекает, что любой n-мерный компакт базисно вложим в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теорема 3.3. *[Ste85] Для любого $n \ge 2$ любой n-мерный компакт не вложим базисно в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Таким образом, оставалось неизвестным лишь описание компактов, базисно *вложимых* в плоскость (о характеризации базисно *вложенных* компактных подмножеств плоскости см. §4). Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов в плоскость получен в [Sko95]. Для конечных графов он формулируется так:

Теорема 3.4. *[Sko95] Конечный граф K базисно вложим в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:*

a) K не содержит подграфов, изображенных на рис. 3.1;

b) K содержится в одном из графов R_n (рис. 3.2).

Figures 3.1 and 3.2 approximately here

Определим графы R_n (рис. 3.2). Пусть $U_1 = T_3$, A — висячее ребро графа U_1, a — висячая вершина ребра A. Граф U_{n+1} получается из U_n разветвлением каждого висячего ребра, кроме A. Пусть V_n — граф, полученный приклеиванием одного нового висячего ребра к каждой не висячей вершине графа U_n. Вершина a называется *корнем* графа V_n. Пусть R_n — букет трех копий V_n и дуги, такой, что корни графов V_n приклеиваются к одной из вершин дуги.

Определение базисного вложения может быть очевидно обобщено на вложения в произвольное декартово произведение $Y_1 \times \dots \times Y_k$. Если X и Y графы, то мы можем представлять себе произведение $X \times Y$ как двумерный объект (в некоторых случаях можно считать, что этот объект расположен в трехмерном пространстве). Например, $T \times I$ является 'книжкой с тремя страницами', $S^1 \times I$ — цилиндром и $S^1 \times S^1$ — тором. Теорема 3.4 была обобщена на случай базисных вложений в декартовы произведения некоторых графов в [Kur00]. Назовем вершину конечного графа K *ужасной*, если ее степень больше четырех. Назовем вершину конечного графа K *страшной*, если ее степень равна четырем, и она не является концом ни одного висячего ребра. *Дефектом* K называется сумма $\delta(K) = (degA_1 - 2) + \dots + (degA_k - 2)$, где $A_1, \dots, A_k$ — все страшные и ужасные вершины графа K.

Теорема 3.5. *[Kur00] Конечное дерево K является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_n$ тогда и только тогда, когда либо $\delta(K) < n$, либо $\delta(K) = n$ и K содержит ужасную вершину, имеющую висячее ребро.*

4.

Напомним определение базисного вложения для частного случая. A compactum $K \subset \mathbb{R}^2$ is *basically embedded* into the plane, if for each continuous function $f : K \to \mathbb{R}$ there exist continuous functions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(x, y) = g(x) + h(y)$ for each point $(x, y) \in K$. V. I. Arnold [Arn58] raised the following problem: find conditions on a compactum $K \subset \mathbb{R}^2$, under which K is *basically* embedded into the plane. This problem was solved by Y. Sternfeld [Ste85, Ste89], who apparently did not knew about [Arn58]. Начнем с простых примеров, поясняющих Геометрический Критерий Базисности Вложения [ср. KuSk97]. Через $[a, b]$ обозначим отрезок, соединяющий точки a, b.

1. Множество $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ не базисно вложено в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через p_x и p_y проекции на координатные оси x и y соответственно. Упорядоченный набор $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *молнией*, если для каждого i выполнено $a_i \neq a_{i+1}$, при этом $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$ для четных i и $p_y(a_i) = p_y(a_{i+1})$ для нечетных i. При этом не обязательно все точки молнии должны быть различны.

Пример 4.2. *Если $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — такая молния, что $a_1 = a_n$, то A не базисно вложена в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — вершины замкнутой ломаной, любые два соседних звена которой перпендикулярны (кроме, возможно, первого и последнего). Если первое и последнее звенья параллельны, т.е. точки a_1, a_{n-1}, a_n лежат на одной прямой, то, выбросив точку a_n, мы все равно получим молнию. Поэтому можно считать, что число звеньев четно и $n = 2k+1$. Пусть $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_1)$, $a_3 = (x_2, y_2)$, $a_4 = (x_3, y_2)$, $a_5 = (x_3, y_3), \dots$ — координаты точек молнии. Доказательство проведем от противного. Для каждой из точек a_i напишем равенство из определения базисного вложения:

$$f(x_1, y_1) = g(x_1) + h(y_1), \qquad f(x_2, y_1) = g(x_2) + h(y_1),$$

$$f(x_2, y_2) = g(x_2) + h(y_2), \qquad f(x_3, y_2) = g(x_3) + h(y_2), \dots$$

$$\dots, f(x_k, y_{k-1}) = g(x_k) + h(y_{k-1}), \qquad f(x_k, y_k) = g(x_k) + h(y_k) = g(x_k) + h(y_k).$$

Просуммируем эти равенства, ставя плюс перед нечетными и минус перед четными. Получаем:

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) - \dots + f(x_k, y_{k-1}) - f(x_k, y_k) = 0.$$

Это верно не для всех непрерывных функций $f : A \to \mathbb{R}^2$. Противоречие. $\square$

Пример 4.3. *Крест $K = [(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$ не базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Пусть для произвольной непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}^2$ существуют непрерывные функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для любых $(x, y) \in K$. Построим бесконечную молнию $\{a_n\} \subset K$, начиная с $a_1 = (-1, 1)$. Точка $a_{i+1} \neq a_i$ определяется условием $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$ для четных i и $p_y(a_i) = p_y(a_{i+1})$ для нечетных i. Ясно, что $\{a_n\}$ сходится к (0,0). Можно считать, что $f(0, 0) = g(0) = h(0) = 0$. Иначе функции $f(x, y), g(x), h(y)$ заменим на функции $f(x, y) - f(0, 0)$,$g(x) - g(0)$ и $h(y) - h(0)$, соответственно. Из непрерывности следует, что $g(a_n), h(a_n)$ сходятся к нулю. Пишем равенства из определения базисного вложения для всех точек a_n и суммируем их с чередованием знаков (используя обозначения предыдущего примера):

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + \dots - f(x_k, y_k) = g(x_1) - g(x_k),$$

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + \dots + f(x_{k+1}, y_k) = g(x_1) + h(x_{k+1}).$$

Переходя к пределу при k стремящемся к бесконечности, получим, что ряд

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + \dots + f(x_k, y_k) - f(x_{k+1}, y_k) - \dots = g(x_1)$$

сходится. Но это верно не для всех непрерывных функций $f : K \to \mathbb{R}^2$. Противоречие. $\square$

Пример 4.4. *Отрезок $[(0, 0), (0, 1)]$ базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Достаточно положить $g(x) = 0, h(y) = f(0, y)$. $\square$

Пример 4.5. *Крест $K = [(0, -1), (0, 1)] \cup [(-1, 0), (1, 0)]$ базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Для любой непрерывной функции f на K имеем $f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0)$. Тогда можно положить $g(x) = f(x, 0) - f(0, 0)$ и $h(y) = f(0, y)$. $\square$

Чтобы сформулировать Геометрический Критерий Базисности Вложения, дадим несколько определений. Пусть Z — подмножество $\mathbb{R}^2$. Для каждой точки $z \in Z$ нарисуем две прямые, проходящие через z параллельно координатным осям. Если хотя бы одна из этих прямых пересекает Z только в точке z, покрасим z в белый цвет. Обозначим через $E(Z)$ множество всех точек Z, не являющихся белыми:

$$E(Z) = \{z \in Z : \ |Z \cap p_x^{-1} p_x z| \geq 2 \text{ and } |Z \cap p_y^{-1} p_y z| \geq 2\}.$$

Пусть $E^2(Z) = E(E(Z))$, $E^3(Z) = E(E(E(Z)))$ и т.д.

Theorem 4.6. *For a compactum $K \subset \mathbb{R}^2$ the following conditions are equivalent:*
(B) the embedding $K \subset \mathbb{R}^2$ is basic;
(E) $E^n(K) = \emptyset$ for some n;
(A) K does not contain any array of n points for some n.

We prove the equivalence by the scheme $(A) \Rightarrow (E) \Rightarrow (B) \Rightarrow (A)$. Here $(A) \Rightarrow (E)$ is trivial [Ste89, Sko95]. Our proof of $(B) \Rightarrow (A)$ is essentially the same as in [Ste89], but we believe it is conceptually more clear. The purpose of this note is to outline an idea of a *conjectural* new short proof of $(E) \Rightarrow (B)$, which is direct and much shorter than in [Ste89]: it does not involve reduction to linear operators and the Banach Inverse Operator Theorem.

Problem. *Find a short proof of $(E) \Rightarrow (B)$ (e.g. using the idea below).*

Proof of $(A) \Rightarrow (E)$. Suppose to the contrary that $E^n(K) \neq \emptyset$. Take a point $a_0 \in E^n(K)$. Then there exist points $a_{-1}, a_1 \in E^{n-1}(K)$ such that $p_x(a_{-1}) = p_x(a_0)$ and $p_y(a_1) = p_y(a_0)$. Analogously, there exist points $a_{-2}, a_2 \in E^{n-2}(K)$ such that $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$ is an array. Analogously we construct an array of $2n+1$ points in K. $\square$

Idea of a possible proof of $(E) \Rightarrow (B)$. We shall prove even more general assertion: If $K \subset \mathbb{R}^2$ is bounded and $E^n(K) = \emptyset$ for some n, then K is basically embedded in $\mathbb{R}^2$ in the uniformly continuous sense (i.e. for each uniformly continuous function $f : K \to \mathbb{R}$ there exist uniformly continuous functions $g : p_x K \to \mathbb{R}$ and $h : p_y K \to \mathbb{R}$ such that $f(x,y) = g(x) + h(y)$ for each point $(x,y) \in K$). Denote

$$E_i(Z) = \begin{cases} \{z \in Z : \ |Z \cap p_x^{-1} p_x z| \geq 2\} & i \text{ even} \\ \{z \in Z : \ |Z \cap p_y^{-1} p_y z| \geq 2\} & i \text{ odd} \end{cases}.$$

Clearly, $E(K) \supset E_2 E_1(K)$. Therefore it suffices to prove our assertion under the assumption that $E_n E_{n-1} \dots E_1(K) = \emptyset$ or $E_n E_{n-1} \dots E_2(K) = \emptyset$. We shall prove it by induction on n. Base $n = 0$ is obvious. To prove the inductive step, suppose that $E_n E_{n-1} \dots E_1(K) = \emptyset$, where $n \geq 1$ (the case $E_n E_{n-1} \dots E_2(K) = \emptyset$ for $n \geq 2$ is proved analogously). Take any uniformly connected function $f : K \to \mathbb{R}$. Then $f|_{E_1(K)}$ is also uniformly connected. Hence by the inductive hypothesis there exist uniformly continuous functions $g : p_x E_1(K) \to \mathbb{R}$ and $h : p_y E_1(K) \to \mathbb{R}$ such that $f(x,y) = g(x) + h(y)$ for each point $(x,y) \in E_1(K)$. Extend h to a continuous function $\mathrm{Cl}\, p_y E_1(K) \to \mathbb{R}$, then to a continuous function $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with bounded support. Then the restriction of the latter extension onto $p_y K$ is a uniformly continuous function $\bar{h} : p_y K \to \mathbb{R}$. Clearly, for each $x \in p_x(K - E_1(K))$ there exists a unique $y_x \in p_y(K - E_1(K))$ such that $(x, y_x) \in K - E_1(K)$. Therefore the function $\bar{g} : p_x(K - E_1(K)) \to \mathbb{R}$ is well-defined by the formula $\bar{g}(x) = f(x, y_x) - h(y_x)$ and is uniformly continuous as a difference of uniformly continuous functions.

Why $y(x) = y_x$ is un. continuous? Why $g \cup \bar{g}$ is uniformly continuous? $\square$

Proof of $(B) \Rightarrow (A)$. Denote by $C(X)$ the space of continuous functions on X with the norm $|f| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. For a subset $K \subset \mathbb{R}^2$ define the *linear superposition* operator $\varphi : C(\mathbb{R}) \oplus C(\mathbb{R}) \to C(K)$ by $\varphi(g,h)(x,y) = g(x) + h(y)$. Clearly, the embedding $K \subset \mathbb{R}^2$ is basic if and only if $\varphi = \varphi_K$ is epimorphic. Some linear relation on $\operatorname{im} \varphi_K$ can force it to be strictly less than $C(K)$. If (A) is not true, then we shall construct such a relation as a limit.

Denote by $L(X)$ the space of bounded linear functionals (i.e. linear relations) on $C(X)$ with the norm $|\mu| = \sup\{|\mu(f)| \ : \ f \in C(X), \ |f| = 1\}$. For an embedding $K \subset \mathbb{R}^2$ define the *dual linear superposition operator*

$$\Phi : L(K) \to L(\mathbb{R}) \oplus L(\mathbb{R}) \quad \text{by} \quad \Phi\mu(g,h) = (\mu(g \circ p_x), \mu(h \circ p_y)).$$

Since $|\Phi\mu| \leq 2|\mu|$, it follows that Φ is bounded. Clearly, the embedding $K \subset \mathbb{R}^2$ is basic if and only if $\Phi = \Phi_K$ is monomorphic. (If an embedding $K \subset \mathbb{R}^2$ is basic, then we can prove that Φ is monomorphic without use of φ as follows. Define a linear operator

$$\Psi : L(\mathbb{R}) \oplus L(\mathbb{R}) \to L(K) \quad \text{by} \quad \Psi(\mu_x, \mu_y)(f) = \mu_x(g) + \mu_y(h),$$

where $g, h \in C(\mathbb{R})$ are such that $g(0) = 0$ and $f(x,y) = g(x) + h(y)$ for $(x,y) \in K$. Clearly, $\Psi\Phi = \mathrm{id}$, hence Φ is monomorphic). By the Banach Inverse Operator Theorem, Φ is monomorphic if and only if there exist $\varepsilon > 0$ such that $|\Phi\mu| > \varepsilon|\mu|$ for each $\mu \in L(K)$. If (A) is not true, then for each n there exists an array $\{a_1, \dots, a_n\} \subset K$. Define a linear functional $\mu \in L(K)$ by $\mu(f) = \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_i)$. Then $|\mu| = n$ and $|\Phi\mu| \leq 4$. So for n large $|\Phi\mu| < \varepsilon|\mu|$, hence (B) is not true. $\square$

Problem. *In the definition of a basic embedding we can replace continuous functions by uniformly continuous (for K non-compact), Lipschitz, Hölder, smooth, C^n, analytic, etc. functions. Find conditions on a compactum (a subset) $K \subset \mathbb{R}^2$, under which K is basically embedded into the plane in the uniformly continuous, Lipschitz, Hölder, smooth, C^n, analytic, etc. sence.*

Acknowledgements

This material was presented in February 2001 as a first part of a course 'Classical and modern problems of geometric toplogy' at Independent University of Moscow. I would like to acknowledge V. Kurlin for translating the beginning of [Ste89] into Russian and for useful discussions concerning §4.

References

References to §§1,2

[ArHu89] D. Archdeacon and P. Huneke, *A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces*, J. Comb. Th., Ser. B **46** (1989), 173–231.
[Cla34] S. Claytor, *Topological immersions of peanian continua in a spherical surface*, Ann. of Math. **35** (1934), 809–835.
[Cla37] S. Claytor, *Peanian continua not embeddable in a spherical surface*, Ann. of Math. **38** (1937), 631–646.
[GHW79] H. H. Glover, J. P. Huneke and C. S. Wang, *103 graphs that are irreducible for the projective plane*, J. Comb. Th. **27:3** (1979), 332–370.
[Hae63] A. Haefliger, *Plongements differentiables dans le domain stable*, Comment. Math. Helv. **36** (1962-63), 155–176.
[HaJu64] R. Halin and H. A. Jung, *Karakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre*, Arch. Math. **15** (1964), 466–469.
[Kos]
[KoSk99] P. Kozhevnikov and A. Skopenkov, *Narrow trees in the plane (in Russian)*, Mat. Obrazovanie **5** (1999), 126–131.
[Kur30] K. Kuratowski, *Sur le problemes des courbes gauche en topologie*, Fund. Math. **15** (1930), 271–283.
[Mak97] Yu. Makarychev, *A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion*, J. of Graph Theory **25** (1997), 129–131.
[MaSe66] S. Mardešić and J. Segal, *A note on polyhedra embeddable in the plane*, Duke Math. J. **33** (1966), 633–638.
[McAd41] S. McLane and V. W. Adkisson, *Extensions of homeomorphisms on the spheres*, Michig. Lect. Topol. (1941), Ann Arbor, 223–230.
[RSS95] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, *On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space*, Houston J. Math **21** (1995), 199–204.
[RSS95'] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, *On uncountable collections of continua and their span*, Colloq. Math. **69** (1995), 289–296.
[ReSk96] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Embeddability and isotopy of polyhedra in euclidean spaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **212** (1996), 173–188.
[ReSk98] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings*, Topol. Appl. **87** (1998), 1–19.
[ReSk99] D. Repovs and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), 61–109 (in Russian); *English transl.*, Russ. Math. Surv. **54:6** (1999).
[RoSe90] N. Robertson and P. D. Seymour, *Graph minors VIII, A Kuratowski graph theorem for general surfaces*, J. Comb. Theory **48B** (1990), 255–288.
[Sko98] A. B. Skopenkov, *On the deleted product criterion for embeddability in $\mathbb{R}^m$*, Proc. Amer. Math. Soc. **126:8** (1998), 2467–2476.
[Sko] A. Skopenkov, *On the Haefliger-Hirsch-Wu invariants for embeddings and immersions*, submitted.
[SSS98] J.Segal, A.Skopenkov and S.Spież, *Embeddings of polyhedra in $\mathbb{R}^m$ and the deleted product obstruction*, Topol. Appl. **85** (1998), 225–234.
[Tho81] C. Thomassen, *Kuratowski's theorem*, J. Graph. Theory **5** (1981), 225–242.
[Wu65] W. T. Wu, *A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space*, Science Press, Peking, 1965.
[Zhi] . .

References to §§3,4

[Arn57] V. I. Arnold, *On functions of three variables*, DAN SSSR **114:4** (1957), 679–681 (in Russian); *English transl.*, ? ? (?), ?.
[Arn58] V. I. Arnold, *Problem 6*, Math. Education **3** (1958), 273. (in Russian)
[Arn62] . . , , **T.56, N 3** (1962), 3-92.
[CRS98] A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Open problems on graphs, arising from geometric topology*, Topol. Appl. **84** (1998), 207–226.
[Kol56] A. N. Kolmogorov, *On the representation of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of fewer variables*, DAN SSSR **108:2** (1956), ? (in Russian); *English transl.*, ? ? (?), ?.
[Kol57] A. N. Kolmogorov, *On the representation of continuous functions of several variables by superposition of functions of one variable and addition*, DAN SSSR **114:5** (1957), 953–956 (in Russian); *English transl.*, ? ? (?), ?.
[Kur00] V. Kurlin, *Basic embeddings into products of graphs*, Topol. Appl. **102** (2000), 113–137.
[KuSk97] V. Kurlin and A. Skopenkov, *Basic embeddings of graphs into the plane (in Russian)*, Math. Obrazovanie **3** (1997), 105–113.
[98] . . , , .: 9- , - (1998), 34–44, 106–113.
[Lor65] G. Lorentz, *Approximation of functions*, Holt, Reinhart and Winston, New York (1965).
[Lor76] G. G. Lorentz, *The 13th problem of Hilbert*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 28 (1976), 419-430.
[Lor77] G. G. Lorentz, *Problems in Approximation theory*, The University of Arkansas Lecture Notes in Mathematics 1 (1977).
[PrSo95] V. V. Prasolov and Yu. P. Solovyov, *Elliptic functions and algebraic equations (in Russian)*, 1995.
[Sko95] A. Skopenkov, *A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$*, Topol. Appl. **65** (1995), 29–48.
[Ste85] Y. Sternfeld, *Dimension, superposition of functions and separation of points in compact metric spaces*, Israel J. Math. **50:1–2** (1985), 13–53.
[Ste89] Y. Sternfeld, *Hilbert's 13th problem and dimension*, Lect. Notes Math **1376** (1989), 1–49.
[Vit54] . . , *13-* , **.95** (1954), 701–704.
[ViHe67] . . , . . , (1967).

skopenko@mccme.ru