ЛЕКЦИЯ 1

Определение 1. *Топологической группой* называется группа с топологией, в которой умножение и взятие обратного — непрерывные отображения.

Определение 2. *Компактной группой* называется топологическая группа, компактная как топологическое пространство.

Пример 1. Конечные группы с дискретной топологией — компактны.

Пример 2. Торы $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N \cong S^1 \times \cdots \times S^1$. Они являются компактными группами Ли с абелевыми алгебрами Ли.

Пример 3. Компактна группа Ли O_n ортогональных преобразований n–мерного евклидова пространства, а также ее связная компонента единицы SO_n, состоящая из собственных преобразований (с определителем единица).

Элементы O_n записываются в надлежащем базисе в виде ортогональных матриц ($AA^t = 1$), элементы ее алгебры Ли o_n записываются в виде кососимметрических матриц ($a + a^t = 0$). Эта алгебра Ли полупроста и ее комплексификация (при $n > 4$) соответствует диаграмме $D_{\frac{n}{2}}$ при четном n и $B_{\frac{n-1}{2}}$ при нечетном.

Пример 4. Компактна группа Ли U_n унитарных преобразований n–мерного эрмитова простанства, а также группа SU_n унитарных преобразований с определителем 1.

Элементы U_n записываются в надлежащем базисе в виде унитарных матриц ($A\overline{A}^t = 1$), элементы ее алгебры Ли u_n записываются в виде косоэрмитовых матриц ($a + \overline{a}^t = 0$). Чтобы получить алгебру Ли su_n следует добавить условие $\operatorname{tr} a = 0$.

Алгебра Ли u_n — редуктивна, а алгебра Ли su_n — полупроста, и ее комплексификация (при $n > 1$) соответствует диаграмме A_{n-1}.

Пример 5. Рассмотрим группу целых l–аддических чисел по сложению. Зададим топологию с помощью метрики $d(a,b) = l^{-v(a-b)}$, где $v(x)$ — количество нулей на конце.

Задача 1. Докажите, что построенная топологическая группа — компактна.

Группа G действует на себе двумя способами — *левыми сдвигами* $x \to g \cdot x$ и *правыми сдвигами* $x \to x \cdot g^{-1}$. Для топологической группы оба этих действия непрерывны, для группы Ли — гладки.

Теорема 1. *(Хаар) На всякой компактной группе существует мера, инвариантная относительно левых и правых сдвигов.*

Докажем эту теорему для компактных групп Ли. А именно, зададим такую меру инвариантной дифференциальной формой.

Лемма 1. *На всякой связной компактной группе Ли существует дифференциальная форма старшей степени, инвариантная относительно левых и правых сдвигов, причем такая форма единственна с точностью до умножения на константу.*

Доказательство. Заметим, что дифференциальная форма, инвариантная относительно левых сдвигов, задается своим значением в единице группы. Поэтому, такая дифференциальная форма старшей степени — единственна с точностью до умножения на константу. Докажем, что она инвариантна относительно правых сдвигов.

Для этого достаточно доказать, что действие группы на касательном пространстве к единице сопряжением (так называемое *присоединенное* действие) сохраняет форму старшей степени, то есть имеет определитель единица.

Для этого заметим, что взятие определителя присоединенного действия является непрерывным отображением групп $G \to \mathbb{R}^*$. Образ G будет связной компактной подгруппой, а таковой в $\mathbb{R}^*$ будет только единичная подгруппа. ■

Задача 2. Что изменится, если отказаться от условия связности?

Нормируем полученную форму так, чтобы объем группы был равен единице и назовем ее μ_G.

Лемма 1 является частным случаем более общего утверждения.

Факт. *Пространство инвариантных форм степени k изоморфно пространству когомологий $H^k_{DR}(G, \mathbb{R})$.*

Упражнение 1. Докажите это для тора $\mathbb{T}^N$, сферы SU_2.

Определение 3. *Представлением* топологической группы (группы Ли) в пространстве V называется **непрерывный (гладкий)** гомоморфизм групп $G \to GL(V)$.

Пример 6. Присоединенное представление $Ad : G \to GL(Lie(G))$ — действие G сопряжением на касательном пространстве к G в единице.

Пример 7. Тавтологическое представление O_n в n–мерном вещественном пространстве, U_n в n–мерном комплексном пространстве.

Упражнение 2. Определите по аналогии с представлениями конечных групп (см. лекцию 1 предыдущего семестра) подпредставление, факторпредставление, прямую сумму представлений, отображение представлений (сплетающий оператор). Докажите, что ядро и образ сплетающего оператора — подпредставления.

Отдельно следует упомянуть тензорное произведение представлений. Пусть V_1, V_2 — представление группы G. Тогда элемент $g \in G$ действует на элементах $V_1 \otimes V_2$ по правилу

$$g(v_1 \otimes v_2) = (gv_1) \otimes (gv_2).$$

Если G — группа Ли, то элементы ее алгебры Ли, будучи производными однопараметрических подгрупп G, действуют по правилу

$$a(v_1 \otimes v_2) = (av_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (av_2).$$

Определение 4. Вещественное предстставление группы G называется *ортогонализуемым*, если на нем можно ввести G–инвариантное скалярное произведение.

Определение 5. Комплексное предстставление группы G называется *унитаризуемым*, если на нем можно ввести G–инвариантное скалярное произведение.

Теорема 2. *Конечномерные вещественные/комплексные представления компактных групп — ортогонализуемы/унитаризуемы.*

Доказательство. Пусть V — пространство представления. Возьмем на нем некоторую положительно определенную форму $(\, , \,)$. Определим инвариантную форму $(\, , \,)_{inv}$ усреднением по группе:

$$(v_1, v_2)_{inv} = \int_{g \in G} (\varrho(g)v_1, \varrho(g)v_2)\mu_G.$$

В силу инвариантности меры относительно правых сдвигов, построенная форма действительно G–инвариантна. Будучи интегралом положительно определенной формы, она положительно определена. ■

Следствие 1. *Всякое конечномерное вещественное/комплексное представление компактной группы — вполне приводимо (прямая сумма неприводимых).*

Следствие 2. *Алгебра Ли компактной группы Ли, а также ее комплексификация — редуктивны.*

Упражнение 3. Докажите, что алгебра Ли односвязной компактной группы Ли — полупроста.

Задача 3. Опишите конечномерные представления $\mathbb{T}^N$.