ЛЕКЦИЯ 10

Пусть G — компактная полупростая группа Ли, T — ее максимальный тор, $\mathfrak{g}$ — соответствующая комплексная алгебра Ли, $R \subset \mathfrak{h}^*$ — ее система корней, W — группа Вейля.

Пусть V — конечномерное представление G. Обозначим за $\mathrm{wt}(V)$ множество весов V, за $\mathrm{mult}_V(\mu)$ — кратность веса μ. Введем также обозначение $\mathrm{ch}\, V$ для ограничения характера χ_V на максимальный тор T. Как уже обсуждалось,

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{\lambda \in \mathrm{wt}(V)} \mathrm{mult}_V(\lambda) \exp(\lambda).$$

Теорема 1. (Формула Г. Вейля для характера) *Пусть V_λ — неприводимое представление G со старшим весом λ. Тогда*

$$\mathrm{ch}\, V_\lambda = \frac{\sum\limits_{w \in W} \mathrm{sgn}(w)\, \exp(w(\lambda + \varrho))}{\prod\limits_{\alpha \in R_+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2))},$$

где ϱ — полусумма положительных корней $\mathfrak{g}$.

Доказательство. В силу неприводимости V_λ имеем $\langle \chi_{V_\lambda}, \chi_{V_\lambda} \rangle_G = 1$, где квадратными скобками обозначено скалярное произведение в $L_2(G)$. Пусть, как определялось в предыдущей лекции,

$$\delta = \prod_{\alpha \in R_+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)).$$

Тогда, по основной теореме предыдущей лекции, $\langle \delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda, \delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda \rangle_T = |W|$. Изучим функцию на торе $\delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda$.

Из центральности характеров следует, что ограничение $\mathrm{ch}\, V_\lambda = \chi_{V_\lambda}|_T$ инвариантно относительно группы Вейля $W = Norm(T)/T$. Оказывается, похожее свойство есть и у функции δ.

Лемма 1. *Для всех $w \in W$ имеет место $w(\delta) = \mathrm{sgn}(w)\delta$.*

Доказательство. Это свойство достаточно проверить для простых отражений s_i. Но если $\alpha \in R_+$, то либо $\alpha = \alpha_i$ и $s_i(\alpha) = -\alpha$, либо по-прежнему $s_i(\alpha) \in R_+$. Значит, при действии s_i сомножители δ просто переставятся, но одно из них поменяет знак. ■

Будем называть функции с таким свойством *косоинвариантными.* Ясно, что произведение косоинвариантной и инвариантной функции косоинвариантно. Определим элементарные косоинвариантные функции $A_\mu = \sum\limits_{w \in W} \mathrm{sgn}(w) \exp(w(\mu))$. Так как $\langle \exp(\mu), \exp(\nu) \rangle_T = \delta_{\mu\nu}$, выполнено $\langle A_\mu, A\nu \rangle_T = |W|\, \delta_{\mu\nu}$.

Ясно, что косоинвариантная функция $\delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda$ является линейной комбинацией функций A_μ с целыми коэффициентами. Чтобы при этом скалярный квадрат был равен $|W|$, с необходимостью получаем $\delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda = \pm A_\mu$ для некоторого μ.

Чтобы вычислить μ сравним старшие веса и их кратности. Старший вес A_μ равен μ и имеет единичную кратность. Старший вес $\mathrm{ch}\, V_\lambda$ равен λ и имеет единичную кратность. Старший вес δ равен ϱ и имеет единичную кратность. Значит, $\mu = \lambda + \varrho$ и $\delta\, \mathrm{ch}\, V_\lambda = A_{\lambda+\varrho}$, что и утверждается. ■

Пример 1. Для $\mathfrak{g} = sl_2$ получаем

$$\mathrm{ch}\, V_n = \frac{x^{n+1} - x^{-n-1}}{x - x^{-1}} = x^{-n} + x^{-n+2} + x^{-n+4} + \cdots + x^n,$$

где $x = \exp(\alpha/2)$ для единственного положительного корня α.

Следствие 1. (Тождество Г. Вейля для знаменателя) *Имеет место равенство*

$$\prod_{\alpha \in R_+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)) = \sum_{w \in W} \mathrm{sgn}(w)\, \exp(w(\varrho))$$

.

Это тождество получается применением формулы Вейля к тривиальному представлению V_0.

Упражнение 1. Приведите тождество Вейля для знаменателя в случае алгебры Ли sl_n к формуле для определителя Вандермонда.

Пусть V — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, на котором картановская подалгебра действует диагонализуемо. Положим $\mathrm{ch}\, V = \sum_{\lambda \in \mathrm{wt}(V)} \mathrm{mult}_V(\lambda) \exp(\lambda)$. Выражение $\mathrm{ch}\, V$ называется *характером* представления V алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 1. *Для представления Верма M_λ имеет место формула*

$$\operatorname{ch} M_\lambda = \frac{\exp(\lambda)}{\prod\limits_{\alpha\in R_+} (1-\exp(-\alpha))}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}$ — все положительные корни. Перепишем правую часть в виде

$$\sum_{r_1,\dots,r_N} \exp\left(\lambda - r_1\alpha^{(1)} - \dots - r_N\alpha^{(N)}\right).$$

Тогда каждое слагаемое будет соответствовать базисному вектору $f_{\alpha^{(N)}}^{r_n}\dots f_{\alpha^{(1)}}^{r_1} v_\lambda \in M_\lambda$. ■

Теперь можно записать формулу Вейля для характера и в другой форме.

Следствие 2. *Имеет место формула*

$$\operatorname{ch} V_\lambda = \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w) \operatorname{ch} M_{w\circ\lambda},$$

где $w\circ\mu = w(\mu+\varrho)-\varrho$.

Действительно, эта формула отличается от исходной умножением обеих частей на $\exp(-\varrho)$. В явном виде

$$\operatorname{ch} V_\lambda = \frac{\sum\limits_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\ \exp(w(\lambda+\varrho)-\varrho)}{\prod\limits_{\alpha\in R_+} (1-\exp(-\alpha))}.$$

Упражнение 2. Вычислите характер неприводимого представления алгебры Ли sl_3 со старшим весом λ, таким что $\lambda(h_1)$ =2, $\lambda(h_2)=3$.

Задача 1. Вычислите кратность нулевого веса неприводимых представлений алгебры Ли sl_3.

Предложение 2. *Имеет место равенство $\varrho(h_i)=1$ для всех i.*

Доказательство. Мы знаем, что простое отражение s_i переводит положительные корни не равные α_i в положительные. Значит, $s_i(\varrho)=\varrho-\alpha_i$. Но по определению $s_i(\varrho)=\varrho-\varrho(h_i)\alpha_i$, откуда следует требуемое утверждение. ■

Пусть $R^\vee$ — двойственная система корней.

Теорема 2. (Формула Г. Вейля для размерности) *Имеет место равенство*

$$\dim V_\lambda = \prod_{\beta\in R^\vee} \frac{\beta(\lambda+\varrho)}{\beta(\varrho)}$$

Доказательство. Пусть $h\in\mathfrak{h}$. Определим *специализацию* F_h как линейное отображение характеров алгебры Ли в многочлены от переменной q, такое что $F_h(\exp(\lambda)) = q^{\lambda(h)}$. Фактически, это — ограничение характера группы Ли на однопараметрическое семейство $\exp(th)$, где $q=\exp(t)$. Ясно, что для любых характеров c_1 и c_2 выполнено $F_h(c_1c_2)=F_h(c_1)F_h(c_2)$.

Пусть $\varrho^\vee\in\mathfrak{h}$ — полусумма положительных кокорней, $\alpha_i(\varrho^\vee)=1$ для всех i. Специализация с помощью этого элемента называется *главной*.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$F_{\varrho^\vee}(\operatorname{ch} V_\lambda) = q^{\lambda(\varrho^\vee)} \prod_{\beta\in R_+^\vee} \frac{1-q^{-\beta(\lambda+\varrho)}}{1-q^{-\beta(\varrho)}}.$$

Доказательство. Из формулы для характера и тождества для знаменателя следует, что

$$F_{\varrho^\vee}\left(\frac{\operatorname{ch} V_\lambda}{\exp(\lambda)}\right) = \frac{F_{\varrho^\vee}\left(\sum_w \operatorname{sgn}(w)\exp(w(\lambda+\varrho)-(\lambda+\varrho))\right)}{F_{\varrho^\vee}\left(\sum_w \operatorname{sgn}(w)\exp(w(\varrho)-\varrho)\right)} = \frac{F_{\varrho^\vee}(N_{\lambda+\varrho})}{F_{\varrho^\vee}(N_\varrho)},$$

где $N_\mu = \sum_w \operatorname{sgn}(w)\exp(w(\mu)-\mu)$. Вычислим главную специализацию этого выражения.

$$F_{\varrho^\vee}(N_\mu) = \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\, q^{\left\langle \varrho^\vee, w(\mu)\right\rangle - \left\langle \varrho^\vee,\mu\right\rangle} = \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\, q^{\left\langle w^{-1}(\varrho^\vee),\mu\right\rangle - \left\langle \varrho^\vee,\mu\right\rangle} =$$

$$= \sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\, q^{\left\langle w(\varrho^\vee)-\varrho^\vee,\mu\right\rangle} = F_\mu\left(\sum_{w\in W} \operatorname{sgn}(w)\exp\left(w(\varrho^\vee)-\varrho^\vee\right)\right),$$

где квадратные скобки обозначают спаривание элементов $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Применяя тождество для знаменателя к двойственной системе корней, получим

$$F_\mu\left(\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\exp(w(\varrho^\vee)-\varrho^\vee)\right)=F_\mu\left(\prod_{\beta\in R_+^\vee}(1-\exp(-\beta))\right)=\prod_{\beta\in R_+^\vee}(1-q^{-\mu(\beta)}).$$

■

Теорема получается из леммы предельным переходом $q\to 1$. ■

Пример 2. Для $\mathfrak{g}=sl_2$ формула для размерности утверждает, что $\dim V_n=n+1$.

Упражнение 3. Проверьте ответ к упражнению 2 с помошью формулы Вейля для размерности.

Задача 2. Докажите, что тавтологическое представление имеет наименьшую размерность среди представлений sl_n, so_n, sp_n. Какие представления исключительных простых алгебр Ли имеют наименьшую размерность?

Перейдем к разложению тензорного произведения. Пусть $V=\bigoplus m_\lambda V_\lambda$ — приводимое представление. Положим $K(V)=\sum m_\lambda\exp(\lambda)$. Таким образом, можно параметризовать все конечномерные представления линейными комбинациями формальных экспонент. Пусть P — линейное отображение, такое что

$$P(\exp(\lambda))=\begin{cases}\exp(\lambda) & \lambda\text{ доминантен}\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$K\left(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\right)=P\left(\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\,w\circ(\exp(\lambda_1)\operatorname{ch}V_{\lambda_2})\right).$$

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{ch}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2})=\operatorname{ch}V_{\lambda_1}\operatorname{ch}V_{\lambda_2}$. Поэтому,

$$\operatorname{ch}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2})=\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\operatorname{ch}M_{w\circ\lambda_1}\operatorname{ch}V_{\lambda_2}.$$

Кроме того, так как $\exp(\mu)\operatorname{ch}M_\lambda=\operatorname{ch}M_{\mu+\lambda}$, имеет место равенство

$$\operatorname{ch}M_\lambda\operatorname{ch}V=\sum_{\mu\in\operatorname{wt}(V)}\operatorname{mult}_V(\mu)\operatorname{ch}M_{\lambda+\mu},$$

таким образом,

$$\operatorname{ch}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2})=\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\sum_{\mu\in\operatorname{wt}(V_{\lambda_2})}\operatorname{mult}_{V_{\lambda_2}}(\mu)\operatorname{ch}M_{w\circ\lambda_1+\mu}.$$

Кроме того, мы знаем, что множество весов V_{λ_2} с учетом кратности инвариантно относительно группы Вейля. Поэтому, используя что $w\circ\lambda+w(\mu)=w\circ(\lambda+\mu)$, получим

$$\operatorname{ch}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2})=\sum_{\mu\in\operatorname{wt}(V_{\lambda_2})}\operatorname{mult}_{V_{\lambda_2}}(\mu)\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\operatorname{ch}M_{w\circ(\lambda_1+\mu)}.$$

Пусть вес $\lambda_1+\mu$ — доминантный. Тогда по формуле Вейля для характера

$$\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\operatorname{ch}M_{w\circ(\lambda_1+\mu)}=\operatorname{ch}V_{\lambda_1+\mu}.$$

Если вес $\lambda_1+\mu$ — не доминантный, то для некоторого $w_1\in W$ вес $w_1\circ(\lambda_1+\mu)$ — доминантный и

$$\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\operatorname{ch}M_{w\circ(\lambda_1+\mu)}=\operatorname{sgn}(w_1)\operatorname{ch}V_{w_1\circ(\lambda_1+\mu)}.$$

Значит,

$$\operatorname{ch}(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2})=\sum_{w\in W}\operatorname{sgn}(w)\sum_{\substack{\mu\in\operatorname{wt}(V_{\lambda_2})\\ w\circ(\lambda_1+\mu)\text{ доминантен}}}\operatorname{mult}_{V_{\lambda_2}}(\mu)\operatorname{ch}V_{w\circ(\lambda_1+\mu)},$$

откуда следует утверждение теоремы. ■

Упражнение 4. Примените теорему 3 к случаю $\mathfrak{g}=sl_2$.

Упражнение 5. Разложите на неприводимые представления тензорный квадрат присоединенного представления sl_3. Какие из полученных представлений принадлежат симметрическому квадрату, а какие внешнему?