ЛЕКЦИЯ 2

Характеры представлений

Пусть G — компактная группа, ϱ — ее конечномерное комплексное представление.

Определение 1. *Характером* представления ϱ называется функция $\chi_\varrho : G \to \mathbb{C}$, определенная по формуле $\chi_\varrho(g) = \mathrm{tr}\varrho(g)$.

Упражнение 1. Докажите, что $\chi_{\varrho_1 \oplus \varrho_2} = \chi_{\varrho_1} + \chi_{\varrho_2}$, $\chi_{\varrho_1 \otimes \varrho_2} = \chi_{\varrho_1} \cdot \chi_{\varrho_2}$, $\chi_{\varrho^*} = \overline{\chi_\varrho}$.

Пусть μ_G — инвариантная мера, нормированная так, что объем группы $\int_G \mu_G$ равен единице.

Определим эрмитово скалярное произведение функций на группе формулой

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)} \mu_G. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть ϱ_1, ϱ_2 — конечномерные представления. Тогда* $\dim \mathrm{Hom}_G(\varrho_1, \varrho_2) = \langle \chi_{\varrho_1}, \chi_{\varrho_2} \rangle$.

Доказательство. Докажем сначала частный случай в качестве леммы.

Определение 2. *Пространство инвариантов* V^G представления V группы G — подпространство, состоящее из векторов, неподвижных относительно действия всех элементов G.

Лемма 1. *Пусть ϱ — представление группы G в пространстве V. Тогда* $\int_{g \in G} \chi_\varrho(g) \mu_G = \dim V^G$

Доказательство. Пусть $I = \int_{g \in G} \varrho(g) \mu_G$ — оператор на V. Докажем, что он является проектором на V^G. Заметим, что для $h \in G$

$$\varrho(h) I = \int_{g \in G} \varrho(h) \varrho(g) \mu_G = \int_{g \in G} \varrho(hg) \mu_G = I,$$

значит, образ I лежит в V^G. Так как I действует на V^G тождественно, I является проектором на V^G и след I равен $\dim V^G$. Внося след под знак интеграла, получим утверждение леммы. ■

Упражнение 2. Пусть V_1, V_2 — представления G. Тогда $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \cong (V_1^* \otimes V_2)^G$.

А по лемме

$$\dim (V_1^* \otimes V_2)^G = \int_G \chi_{V_1^* \otimes V_2} \mu_G = \langle \chi_{V_2}, \chi_{V_1} \rangle .$$

Сопрягая действительную величину, получим утверждение теоремы. ■

Скомбинируем утверждение теоремы с леммой Шура (см. лекцию 2 прошлого семестра).

Следствие 1. *Характеры неприводимых представлений ортонормированы относительно скалярного произведения 1.*

Следствие 2. *Представления с одинаковым характером — изоморфны.*

Упражнение 3. (см. лекцию 2 прошлого семестра) Пусть ϱ, ϱ_1, ϱ_2 — неизоморфные неприводимые представления в пространствах V, V_1, V_2. Выберем ортонормированный базис относительно инвариантного скалярного произведения и запишем действие группы матрицами. Тогда для матричных элементов выполнено

$$\left\langle \varrho_1^{i_1 j_1}, \varrho_2^{i_2 j_2} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \varrho^{i_1 j_1}, \varrho^{i_2 j_2} \right\rangle = \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}}{\dim V}.$$

Это дает другое доказательство теоремы 1.

Задача 1. Вычислите характер присоединенного представления U_n.

Регулярное представление

Рассмотрим линейное пространство $C[G]$ непрерывных функций на G с метрикой $d(f,g) = \max|f-g|$. Действие группы на себе левыми и правыми сдвигами определяет представления $C_L[G]$ и $C_R[G]$ группы G изометриями пространства $C[G]$.

Упражнение 4. $C_L[G] \cong C_R[G]$.

Определение 3. Пространство $C[G]$ с определенным выше действием называется *регулярным* представлением.

В качестве альтернативы можно рассматривать гильбертово пространство $L^2(G,\mu_G)$ функций с интегрируемым квадратом и (для групп Ли) пространство гладких функций.

Предложение 1. *Пусть V — конечномерное представление. Тогда* $\dim \mathrm{Hom}_G(V, C[G]) = \dim V$.

Доказательство. Построим отображение $\mathrm{Hom}_G(V,C[G]) \to \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}) \cong V^*$, сопоставляющее каждой функции ее значение в единице. Нам надо доказать, что это отображение — изоморфизм.

Пусть $f \in \mathrm{Hom}_G(V,C[G])$, $v \in V$. Обозначим $f_v \in C[G]$ значение f на элементе v. Если $f_v(1) = 0$ для всех $v \in V$, то $f_v(g) = f_v(g\cdot 1) = f_{gv}(1) = 0$, значит, $f = 0$, и построенное отображение — вложение. С другой стороны, для любого заданного $f_v(1)$ можно положить $f_v(g) = f_{gv}(1)$ и, по определению представления топологической группы, полученная функция будет непрерывной. ■

Теорема 2. *(Петер, Г. Вейль) Конечномерные подпредставления плотны в $C[G]$.*

Доказательство этой теоремы не очень сложно, но использует теорию компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Пример 1. Применение теоремы 2 к тору $T^1 \cong S^1$ приводит к разложению периодических функций в ряды Фурье.

Упражнение 5. Докажите, что конечномерные подпредставления плотны в $L^2[G]$. Докажите аналог предложения 1 для $L^2[G]$.

Упражнение 6. Докажите, что линейные комбинации матричных элементов конечномерных представлений плотны в $C[G]$.

Задача 2. (см. лекцию 3 прошлого семестра) Докажите, что линейные комбинации характеров конечномерных представлений плотны в подпространстве $C_c[G]$ центральных функций (функций, постоянных на классах сопряженности).

Определение 4. Представление называется *точным*, если всякий элемент группы, отличный от единицы, действует не тождественно.

Следствие 3. *У всякой компактной группы Ли существует точное конечномерное представление.*

Доказательство.

Докажем, что для любого элемента g группы существует окрестность U_g (проколотая если $g = e$), действующая точно в некотором конечномерном представлении V_g.

В качестве V_e можно взять любое точное представление алгебры Ли. Мы знаем, что алгебра Ли компактной группы редуктивна. Поэтому можем взять прямую сумму присоединенного представления ее полупростой части и точного представления абелевой части диагональными матрицами.

В качестве V_g можно взять любое представление, на котором элемент g действует не тождественно. Для этого возьмем функцию на группе, такую что $f(1) = 0$ и $f(g) = 1$, и приблизив ее с точностью $\epsilon < 1/2$, найдем требуемое представление.

Выберем из окрестностей конечное подпокрытие $U_{g_1}, \ldots, U_{g_n}$. Тогда представление $V_{g_1} \oplus \cdots \oplus V_{g_n}$ будет точным. ■

Упражнение 7. Докажите, что группа целых l–аддических чисел не имеет точного конечномерного представления.

Определение 5. *Однородным пространством* топологической группы G называется топологическое пространство, на котором группа G действует (непрерывными преобразованиями) транзитивно.

Упражнение 8. Докажите, что стабилизаторы всех точек однородного пространства сопряжены.

Пример 2. Следующие пространства являются однородными пространствами группы O_n:

Сфера S^{n-1}, стабилизатор точки изоморфен O_{n-1}.

Многообразие Грассмана $Gr(k,n)$ k–мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, стабилизатор точки изоморфен $O_k \times O_{n-k}$.

Многообразие полных флагов, стабилизатор точки изоморфен $(\{\pm 1\})^n$.

Если X — однородное пространство группы G, то пространство непрерывных функций $C[X]$ — представление G.

Теорема 3. *(Фробениус) Пусть X — однородное пространство компактной группы G, $H \subset G$ — стабилизатор некоторой точки X, V — конечномерное представление G. Тогда размерность пространства сплетающих операторов $\mathrm{Hom}_G(V, C[X])$ равна размерности пространства инвариантов V^H.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ — точка, стабилизатор которой равен H. Построим отображение $\mathrm{Hom}_G(V, C[G]) \to \mathrm{Hom}_H(V, \mathbb{C}) \cong V^H$, сопоставляющее каждой функции ее значение в точке x. Доказательство того, что это отображение — изоморфизм повторяет доказательство предложения 1. ■

Упражнение 9. Докажите, что конечномерные подпредставления плотны в $C[X]$.