ЛЕКЦИЯ 3

Эта лекция посвящена первому содержательному примеру — представлениям группы SU_2. Тем не менее, начнем с общей теоремы.

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, ϱ — конечномерное представление G в пространстве V. Тогда $\mathfrak{g}$ действует на V производными действия однопараметрических семейств. Соответствующее представление назовем *производной* от ϱ и обозначим ϱ'. Кроме того, мы хотим, наоборот, *проинтегрировать* представление алгебры Ли до представления группы.

Теорема 1. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, π — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Тогда однозначно определено представление ϱ группы G в пространстве V, производная которого ϱ' совпадает с π.*

Доказательство.

Экспоненциальное отображение однозначно определяет действие некоторой окрестности единицы группы G в пространстве V. Для начала формализуем понятие представления для окрестности единицы в группе Ли.

Определение 1. *Локальной группой* называется следующий набор данных:

- открытое множество $U \subset \mathbb{R}^N$,
- его открытое подмножество $U_0 \subset U$,
- гладкие отображения "умножения" $U_0 \times U_0 \to U$ и "взятия обратного" $U_0 \to U$,
- единица $e \in U_0$.

При этом аксиомы группы выполнены всегда, когда они имеют смысл:

- если a, b, $c \in U_0$, $ab \in U_0$ и $bc \in U_0$, то $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- для всех $x \in U_0$ выполнено $e \cdot x = x \cdot e = x$,
- если $x \in U_0$, $x^{-1} \in U_0$, то $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Определение 2. *Представлением* ϱ локальной группы (U, U_0) в пространстве V называется отображение $U \to GL(V)$, такое что если a, $b \in U_0$, то $\varrho(a \cdot b) = \varrho(a) \circ \varrho(b)$.

Мы хотим продолжить представление ϱ окрестности единицы (U, U_0) группы G до представления группы G. Чтобы определить действие элемента $g \in G$, соединим его путем l с единицей группы. Разобьем путь l точками $e = p_0, p_1, \dots, p_n = g$ так, чтобы $g_i = p_i \cdot p_{i-1}^{-1} \in U_0$, и положим

$$\varrho(g, l) = \varrho(g_n) \circ \dots \circ \varrho(g_1).$$

Из определения локальной группы и ее представления следует, что если разбиения пути l достаточно мелкие (формализуйте это!), то $\varrho(g, l)$ не зависит от разбиения. Кроме того,

$$\varrho(g_1, l_1) \circ \varrho(g_2, l_2) = \varrho(g_1 \cdot g_2, l_1 g_2 + l_2),$$

где $l_1 g_2$ — применение правого сдвига к пути l_1, а знак "+" означает пририсовывание одного пути к другому.

Наконец заметим, что из определения локальной группы и ее представления следует, что $\varrho(g, l)$ зависит только от гомотопического класса пути l. Поэтому для односвязной группы можно положить $\varrho(g) = \varrho(g, l)$ для произвольного пути l и получить требуемое представление группы. ■

Упражнение 1. Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — представления группы Ли. Докажите, что всякое отображение представлений ϱ_1 в ϱ_2 является отображением представлений ϱ_1' в ϱ_2' и наоборот.

Таким образом, категории представлений связной односвязной группы Ли и ее алгебры Ли эквивалентны.

Следствие 1. *(Унитарный прием Г.Вейля) Пусть G — компактная односвязная группа Ли. Тогда конечномерные представления $Lie(G)$, а также конечномерные комплексные представления ее комплексификации $Lie_{\mathbb{C}}(G) = Lie(G) \otimes \mathbb{C}$ — вполне приводимы.*

Условие односвязности можно ослабить до конечности фундаментальной группы, но совсем отказаться от него нельзя.

Упражнение 2. Приведите пример представления абелевой алгебры Ли (алгебры Ли тора), не являющегося вполне приводимым.

И так, перейдем к группе SU_2. Она односвязна и комплексификация ее алгебры Ли изоморфна алгебре Ли sl_2 матриц 2×2 с нулевым следом. Тем самым, мы знаем, что представления алгебры Ли sl_2 вполне приводимы и нам достаточно изучить ее неприводимые представления.

Теорема 2. *Существует ровно одно с точностью до изоморфизма неприводимое представление алгебры Ли sl_2 данной размерности.*

По ходу доказательства выясним, как устроены эти представления. Выберем базис в sl_2: пусть

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad .$$

Тогда $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$.

Пусть в дальнейшем V — неприводимое представление sl_2. Для краткости будем опускать значок ϱ для действия элементов алгебры Ли. То есть выражения вида efv следует понимать как $\varrho(e)\varrho(f)v$.

Предложение 1. *Элемент h действует на неприводимых представлениях диагонализуемой матрицей.*

Доказательство. Пусть $V_0 \subset V$ — сумма собственных подпространств h. Убедимся, что V_0 — подпредставление, а следовательно, $V_0 = V$.

Пусть v — собственный вектор с собственным значением λ. Тогда ev и fv — также собственные векторы:

$$hev = ehv + [h,e]v = \lambda ev + 2ev = (\lambda+2)ev, \qquad hfv = fhv + [h,f]v = \lambda fv - 2fv = (\lambda-2)fv.$$

То есть, подпространство V_0 сохраняется при действии базисных элементов e, h и f, а значит, является подпредставлением. ■

Определение 3. Собственные значения h называются *весами* представления V, максимальное из собственных значений называется *старшим весом* V. Размерность соответствующего собственного подпространства называется *кратностью веса.*

Предложение 2. *Старший вес неприводимого представления sl_2 — неотрицательное целое число.*

Доказательство. Пусть λ — старший вес, v — собственный вектор с собственным значением λ. Рассмотрим набор векторов $f^i v$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$. Вычислим действие e на этих векторах. Во первых, $ev = 0$ как вектор с весом, большим старшего. Далее, $ef^k v = f^k ev + [e, f^k]v = [e, f^k]v$. Используя правило Лейбница для коммутации с произведением, получим

$$ef^k v = \sum_{l=0}^{k-1} f^{k-l-1}[e,f]f^l v = \sum_{l=0}^{k-1} f^{k-l-1} h f^l v = \sum_{l=0}^{k-1} (\lambda - 2l) f^{k-1} v = (k\lambda - k(k-1)) f^{k-1} v. \tag{1}$$

Заметим, что веса векторов $f_i v$ различны (они равны $\lambda - 2i$), значит, поскольку представление конечномерно, рано или поздно эти векторы станут нулевыми. Пусть k — наименьшее число, такое что $f^k = 0$. Тогда $0 = ef^k v = (k\lambda - k(k-1))f^{k-1}v$, а поскольку $f^{k-1}v \neq 0$, имеем $(k\lambda - k(k-1)) = 0$ и $\lambda = k-1$ — целое неотрицательное число. ■

Предложение 3. *Кратность весов неприводимого представления алгебры sl_2 равна единице.*

Доказательство. Пусть v — вектор старшего веса. Тогда, согласно формуле (1), векторы $f^i v$ образуют подпредставление. В силу неприводимости оно совпадает со всем пространством. ■

Предложение 4. *Неприводимое представление sl_2 со старшим весом $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ существует, единственно с точностью до изоморфизма и имеет размерность $\lambda + 1$.*

Доказательство. Действительно, проверка коммутационных соотношений показывает, что формула (1) определяет действие алгебры Ли sl_2 на пространстве с базисом v, fv, $f^2 v, \ldots, f^\lambda v$, где v — вектор старшего веса λ.

Рассмотрим произвольное представление со старшим весом λ. Пусть v — вектор веса λ. Тогда, по формуле (1), $f^i v \neq 0$ при $i < \lambda + 1$, и если $f^{\lambda+1} v \neq 0$, то $f^i v \neq 0$ для всех i, что противоречит конечномерности. Кроме того, векторы $f^i v$, $i = 1 \ldots \lambda$ линейно независимы как векторы с различными собственными значениями действия h. Таким образом, наше представление изоморфно построенному выше. ■

Назовем V_λ представление со старшим весом λ. Мы знаем. что представление V_0 — тривиальное, V_1 — тавтологическое, V_2 — присоединенное.

Упражнение 3. Докажите, что $V_\lambda \cong S^\lambda(V_1)$.

Задача 1. Найдите характер V_λ как представления группы SU_2.

Разложим тензорное произведение неприводимых представлений на неприводимые:

$$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} = \bigoplus_{\lambda} \mu_{\lambda_1,\lambda_2}^{\lambda_3} V_{\lambda_3}.$$

Числа $\mu_{\lambda_1,\lambda_2}^{\lambda_3}$ называются *коэффициентами Клебша–Гордона*

Задача 2. Вычислите коэффициенты Клебша–Гордона для представлений sl_2.

Оператор Каземира

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с выбранной инвариантной невырожденной билинейной (не эрмитовой!) формой $g_{ij} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ (такой формой обладают все редуктивные алгебры Ли). В силу невырожденности, форма отождествляет $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, а значит, определен инвариантный тензор $K = g^{ij} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Упражнение 4. Пусть $\{a_i\}$ и $\{a^i\}$ — двойственные базисы в $\mathfrak{g}$ (то есть $(a_i, a^j) = \delta_i^j$). Тогда $K = \sum_i a_i \otimes a^i$ (в частности, это выражение не зависит от выбора базиса).

Определим действие $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ на представлении ϱ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, полагая $\varrho(a_1 \otimes a_2) = \varrho(a_1) \circ \varrho(a_2)$. Аналогично можно определить и действие тензоров более высокого порядка.

Упражнение 5. Докажите, что действие группы и действие инвариантных тензоров коммутируют.

Определение 4. Элемент $K \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ называется *элементом Каземира*, оператор $\varrho(K)$ называется *оператором Каземира.*

И так,

Предложение 5. *Оператор Каземира на неприводимом представлении — скаляр.*

Пусть теперь $\mathfrak{g} = sl_2$.

Упражнение 6. Всякая инвариантная билинейная форма на sl_2 пропорциональна форме, заданной в базисе e, h, f матрицей $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Это упражнение можно сделать прямым вычислением, а можно воспользоваться простотой sl_2 и формой Киллинга–Картана.

Чтобы найти элемент Каземира, просто обратим эту матрицу, получим $g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть $K = e \otimes f + f \otimes e + \frac{1}{2} h \otimes h$.

Мы знаем, что на представлениях V_λ этот элемент действует константами, поэтому достаточно вычислить его действие на старший вектор.

Предложение 6. *Элемент Каземира действует на V_λ скаляром $\lambda^2/2 + \lambda$.*

Это дает еще один способ различать неприводимые представления sl_2.