ЛЕКЦИЯ 4

Гармонический анализ на сфере S^2

Приложим изученные на прошлой лекции представления sl_2 к функциям на сфере S^2.

Многообразие S^2 является однородным пространством группы SO_3. Группа SO_3 изоморфна фактору SU_2 по скалярам $\{\pm 1\}$. Значит, $Lie(SO_3) \cong Lie(SU_2)$ и всякое комплексное представление SO_3 является представлением алгебры Ли $sl_2 \cong Lie_{\mathbb{C}}(SU_2)$ и, тем самым, группы Ли SU_2. А чтобы представление SU_2 было представлением SO_3 необходимо и достаточно, чтобы скаляр $-1 \in SU_2$ действовал на нем тождественно.

Предложение 1. *Всякое неприводимое представление SO_3 изоморфно $V_{2\lambda}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}_+$.*

Выберем базис в алгебре Ли so_3. Пусть

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = -\varepsilon_3$, $[\varepsilon_2, \varepsilon_3] = -\varepsilon_1$, $[\varepsilon_3, \varepsilon_1] = -\varepsilon_2$. Отождествим комплексификацию этой алгебры Ли с sl_2, полагая $h = 2i\varepsilon_1$, $e = \varepsilon_2 - i\varepsilon_3$, $f = -\varepsilon_2 - i\varepsilon_3$.

Вернемся к $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Группа SO_3 ортогональных преобразований $\mathbb{R}^3$ действует транзитивно на S^2. При этом стабилизатором точки $(0, 0, 1)$ будет однопараметрическая подгруппа $H \subset SO_3$ порожденная ε_1. Согласно теореме Фробениуса, кратность вхождения неприводимого представления V в представление $C[S^2]$ в функциях на сфере равно размерности $V^H \cong V^{\varepsilon_1} \cong V^h$, что совпадает с кратностью нулевого веса. Подведем итог.

Предложение 2. *Все неприводимые представления SO_3 входят в представление $C[S^2]$ с кратностью 1.*

Рассмотрим еще одно представление SO_3, а именно, пусть P_3 — пространство многочленов от трех переменных. Ограничение на сферу задает отображение $P_3 \to C[S^2]$, образ которого $P[S^2]$ плотен.

Вычислим действие оператора Каземира на представлении P_3. Для этого выразим его через ε_i:

$$K = e \otimes f + f \otimes e + \frac{1}{2} h \otimes h = -2(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_3).$$

На функциях в $\mathbb{R}^3$ действие алгебры Ли so_3 может быть записано дифференциальными операторами: $\varepsilon_1 = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$, $\varepsilon_2 = x\partial/\partial z - z\partial/\partial x$, $\varepsilon_3 = y\partial/\partial z - z\partial/\partial y$. Вычисляя, получим, что

$$K = -2\left((x^2 + y^2 + z^2)\Delta - E^2 - E\right),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x + \partial^2/\partial y + \partial^2/\partial z$ — оператор Лапласа, а $E = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$ — векторное поле Эйлера.

Определение 1. Функции, на которые оператор Лапласа Δ действует нулем, называются *гармоническими*.

Ясно, что пространство гармонических многочленов $\mathcal{H}_3 \subset P_3$ образует представление SO_3. Используя это представление, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Значение любого многочлена на сфере совпадает со значением ровно одного гармонического многочлена.*

Это — алгебраический аналог теоремы о том, что уравнение Лапласа имеет единственное решение с данными краевыми условиями на сфере.

Доказательство. Теорема утверждает что отображение ограничения $\mathcal{H}_3 \to P[S^2]$ — изоморфизм.

Лемма 1. *Однородные гармонические многочлены любой степени существуют.*

Доказательство. Обозначим $P_3(n)$ пространство однородных многочленов степени n. Тогда оператор Лапласа задает линейное отображение из $P_3(n)$ в $P_3(n-2)$. А так как $\dim P_3(n) > \dim P_3(n-2)$, он имеет нетривиальное ядро. ■

Лемма 2. *Действие SO_3 на любой однородный гармонический многочлен степени n порождает подпредставление изоморфное V_{2n}.*

Доказательство. Заметим, что оператор Эйлера E действует на $P_3(n)$ скаляром n. Значит, оператор Каземира действует на гармонические многочлены из $P_3(n)$ скаляром $2n^2+2n$, что совпадает с действием оператора Каземира на V_{2n} и только на нем.

Из этого следует, что представление, порожденное гармоническим многочленом степени n, не содержит других неприводимых представлений, то есть является прямой суммой нескольких экземпляров V_{2n}. Но если экземпляров более одного, то представление не может быть порождено одним вектором. ■

Тем самым, все представления SO_3 реализуются гармоническими многочленами. По предложению 2 это означает, что образ $\mathcal{H}_3$ в $C[S^2]$ содержит все конечномерные подподпредставления. В частности, он содержит образ $P_3(n)$, а значит и образ P_3, который и составляет $P[S^2]$. Таким образом, отображение $\mathcal{H}_3 \to P[S^2]$ — наложение.

С другой стороны, ограничение ненулевого гармонического многочлена на сферу не может быть нулевым так как SO_3 действует на него как на вектор нетривиального представления. ■

Следствие 1. *Размерность пространства однородных гармонических многочленов степени n от трех переменных равна $2n+1$.*

Упражнение 1. Докажите аналог теоремы 1 для S^1. Как связано это утверждение и ряды Фурье?

Задача 1. Докажите аналог теоремы 1 для S^3.

Соответствие компактных групп Ли и редуктивных алгебр Ли

Определение 2. *Компактной алгеброй Ли* называется вещественная алгебра Ли с положительно определенным инвариантным скалярным произведением.

Предложение 3. *Алгебра Ли компактной группы — компактна.*

Действительно, на любом представлении компактной группы есть инвариантное скалярное произведение. В частности, и на присоединенном.

Предложение 4. *Компактная алгебра Ли и ее комплексификация — редуктивна.*

Действительно, ко всякому идеалу есть ортогональное дополнение, также являющееся идеалом.

Определение 3. Вещественная алгебра Ли $\mathfrak{a}$ называется *вещественной формой* комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ если ее комплексификация $\mathfrak{a}\otimes\mathbb{C}$ изоморфна $\mathfrak{g}$.

Упражнение 2. Докажите, что u_n и $sl_n(\mathbb{R})$ являются неизоморфными вещественными формами комплексной алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$.

Теорема 2. *Всякая редуктивная алгебра Ли имеет компактную вещественную форму.*

Доказательство. Достаточно доказать эту теорему для полупростых алгебр Ли. Структурная теорема утверждает, что они задаются системой корней R и имеют следующий базис: h_i, $i=1\ldots \mathrm{rk}\ R$, u_α, $\alpha\in R$. При этом

$$[h_i,h_j]=0,\qquad [h_i,u_\alpha]=\alpha(h_i)u_\alpha,\qquad [u_\alpha,u_{-\alpha}]=\check{\alpha},\qquad [u_\alpha,u_\beta]=N_{\alpha,\beta}u_{\alpha+\beta}\ \text{ при }\ \beta+\alpha\neq 0,$$

где двойственный корень $\check{\alpha}$ — просто линейная комбинация h_i с целыми коэффициентами, а $N_{\alpha,\beta}$ — действительные числа, равные нулю если $\alpha+\beta\notin R$. Из–за произвола выбора констант $N_{\alpha,\beta}$ такой базис определен неоднозначно. Для наших целей достаточно дополнительно предположить, что $N_{\alpha,\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$ (такой выбор возможен благодаря инволюции Шевалле).

Форма Киллинга–Картана положительно определена на вещественном пространстве, порожденном h_i. Кроме того, $(u_\alpha,u_\beta)=0$ при $\alpha+\beta\neq 0$ (это следует из инвариантности формы) и $(u_\alpha,u_{-\alpha})$ — положительное вещественное число (это тоже следует из инвариантности формы: $\alpha(\check{\alpha})(e_\alpha,e_{-\alpha})=([\check{\alpha},e_\alpha],e_{-\alpha})=(\check{\alpha},[e_\alpha,e_{-\alpha}])=(\check{\alpha},\check{\alpha})$).

Рассмотрим теперь вещественное подпространство, натянутое на векторы

$$ih_i,\quad u_\alpha-u_{-\alpha},\quad i(u_\alpha+u_{-\alpha}).$$

Оно образует вещественную алгебру Ли, а ограничение формы Картана–Киллинга на нее — отрицательно определено. Меняя знак, получим положительно определенную форму.

Упражнение 3. Докажите, что применение этой конструкции к алгебре Ли sl_n выдает su_n.

■

Теорема 3. *Всякая компактная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой компактной группы.*

Доказательство. Достаточно доказать эту теорему для простых компактных алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая компактная алгебра Ли, G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Сейчас будет доказана компактность группы $G/Z(G)$, где $Z(G)$ — центр G, но на самом деле компактна и сама группа G. При этом, так как $\mathfrak{g}$ — полупроста, $Z(G)$ — дискретен и $Lie(G/Z(G)) \cong \mathfrak{g}$.

Рассмотрим присоединенное действие G на $\mathfrak{g}$. Наличие инвариантного скалярного произведения позволяет рассматривать это действие как отображение $G \to O(\mathfrak{g})$, где $O(\mathfrak{g})$ — группа ортогональных преобразований $\mathfrak{g}$. Ядром этого отображения будет в точности центр группы G. Таким образом, получаем вложение $G/Z(G)$ в компактную группу $O(\mathfrak{g})$ и остается доказать замкнутость этого вложения.

Упражнение 4. Приведите пример вложения некомпактной группы Ли в компактную.

Рассмотрим подгруппу $Aut(\mathfrak{g}) \subset O(\mathfrak{g})$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Она замкнута и содержит $G/Z(G)$ в качестве подгруппы внутренних автоморфизмов. Докажем, что $G/Z(G)$ является связной компонентой единицы в $Aut(\mathfrak{g})$.

Определение 4. Отображение d алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в себя называется *дифференцированием*, если для всех $a, b \in \mathfrak{g}$ выполнено $d([a,b]) = [d(a), b] + [a, d(b)]$.

Дифференцирования алгебры Ли сами образуют алгебру Ли относительно коммутации. Обозначим эту алгебру Ли $Der(\mathfrak{g})$. Поскольку присоединенное действие любого элемента — дифференцирование, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ отображается (а в полупростом случае вкладывается) в алгебру Ли $Der(\mathfrak{g})$. Такие дифференцирования также называются *внутренними*.

Упражнение 5. Докажите, что $Lie(Aut(\mathfrak{g})) = Der(\mathfrak{g})$, причем касательное пространство к внутренним автоморфизмам состоит из внутренних дифференцирований.

Таким образом, нам достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Всякое дифференцирование полупростой алгебры Ли — внутреннее.*

Доказательство. Заметим, что внутренние дифференцирования образуют идеал. Действительно, если d — дифференцирование и $a \in \mathfrak{g}$, то по тождеству Якоби $[d, \mathrm{ad}\ a] = \mathrm{ad}\ d(a)$.

Рассмотрим инвариантную билинейную форму Картана–Киллинга, связанную с представлением в пространстве $\mathfrak{g}$. Она — невырождена на $\mathfrak{g}$, поэтому ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ в $Der(\mathfrak{g})$ будет снова идеалом. Но если $d \in \mathfrak{g}^{\perp}$, то $0 = [d, \mathrm{ad}\ a] = \mathrm{ad}\ d(a)$ для всех a, откуда $d(a) = 0$ и $d = 0$.

■

Упражнение 6. Докажите, что автоморфизм $A \to -A^t$ алгебры Ли sl_n не является внутренним при $n > 2$.

■

Задача 2. Рассмотрим кватернионное линейное пространство размерности n со скалярным произведением. Чтобы положительная определенность имела смысл, положим $(\lambda v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2)$, а $(v_1, \lambda v_2) = \overline{\lambda}(v_1, v_2)$, где $\lambda \in \mathbb{H}$, а сопряжение меняет знак i, j и k. Пусть H_n — группа Ли линейных преобразований кватернионного пространства, сохраняющих скалярное произведение. Докажите, что H_n — компактна, а $Lie\mathbb{C}(H_n) \cong sp_{2n}(\mathbb{C})$.