ЛЕКЦИЯ 5

Максимальные торы компактных групп

Упражнение 1. Всякая связная коммутативная компактная группа Ли — тор.

Определение 1. *Максимальным тором* компактной группы Ли называется максимальная по вложению коммутативная связная подгруппа Ли.

Предложение 1. *Касательное подпространство к максимальному тору является максимальной коммутативной подалгеброй Ли.*

Действительно, если бы касательное пролстранство к максимальному тору содержалось в большей коммутативной подалгебре, то замыкание группы, порожденной экспонентами элементов этой подалгебры, было бы связной коммутативной подгруппой Ли, содержащей максимальный тор, но не совпадающей с ним.

Упражнение 2. Докажите, что всякая максимальная коммутативная подалгебра Ли является касательным пространством к некоторому максимальному тору.

Упражнение 3. Докажите, что в торе T^N найдется элемент, степени которого плотны в T^N.

Такой элемент будем называть *иррациональной образующей*, а направление всюду плотной обмотки будем называть *иррациональным направлением.*

Основным техническим средством для изучения картановских подгрупп будет следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть группа G компактна. Тогда экспоненциальное отображение из $Lie(G)$ в G сюръективно.*

Упражнение 4. Найдите образ экспоненциального отображения для группы $SL_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Доказательство основано на римановой геометрии — геометрии многообразий со скалярным произведением на касательных пространствах.

На алгебре Ли компактной группы определено инвариантное скалярное произведение. Разнесем его левыми или правыми (это не важно в силу инвариантности) сдвигами по всей группе. Теперь мы можем определить длину кривой по правилу

$$l(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t))}dt.$$

Будем называть кривую *наикратчайшей*, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых с данными концами.

Определение 2. *Геодезической линией* называется кривая, всякий достаточно малый отрезок которой является наикратчайшим.

В частности, наикратчайшая кривая является геодезической линией.

Лемма 1. *Геодезическими линиями на компактной группе Ли G являются кривые $g \cdot exp(ta)$, где $g \in G$, $a \in Lie(G)$, и только они.*

Лемма 2. *Пусть многообразие M геодезически полно, то есть всякая геодезическая может быть продолжена до бесконечности. Тогда любые две точки M можно соединить геодезической линией.*

Доказательство леммы 2 и (в менее явном виде) леммы 1 можно найти в книге Дж. Милнора "Теория Морса" (глава 2, § 10). Терема немедленно следует из этих двух лемм.

■

Следствие 1. *Всякий элемент компактной группы Ли содержится в некотором максимальном торе.*

Действительно, всякий элемент g группы Ли является экспонентой некоторого элемента a алгебры Ли. Рассмотрим замыкание подгруппы, состоящей из элементов $exp(ta)$. Она коммутативна и связна, а значит, она содержится в некотором максимальном торе. Тогда и элемент g содержится в нем.

Теорема 2. *Любые два максимальных тора — сопряжены.*

Доказательство.

Лемма 3. *Пусть T — максимальный тор компактной группы Ли G. Тогда всякий элемент $g \in G$ сопряжен элементу T.*

Доказательство. Пусть x, y — элементы $Lie(G)$, такие что $exp(x) = g$, а y — иррациональное направление T. Определим функцию на группе G формулой $\varphi(u) = (x, uyu^{-1})$, где скобки означают инвариантное скалярное произведение. Эта функция непрерывна, значит, в силу компактности группы, она достигает максимума в некоторой точке $u_0 \in G$. Докажем, что $u_0^{-1}gu_0 \in T$. Действительно, для всякого $z \in Lie(G)$

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(u_0 exp(tz)) = \frac{d}{dt}(x, u_0 exp(tz) \cdot y \cdot exp(-tz)u_0^{-1}) = (x, u_0[z, y]u_0^{-1}) = ([y, u_0^{-1}xu_0], z),$$

Значит, $[y, u_0^{-1}xu_0] = 0$. Тогда $u_0^{-1}xu_0$ коммутирует с $exp(ty)$, а значит и со всеми элементами тора. Но так как касательное пространство к тору является максимальной коммутативной подалгеброй, отсюда следует, что $u_0^{-1}xu_0$ принадлежит касательному пространству к тору, а $u_0^{-1}gu_0$ принадлежит самому тору. ■

Пусть теперь T_1 и T_2 — два максимальных тора. Тогда, применяя лемму к тору T_1 и иррациональному направлению в T_2, получим, что T_2 сопряжен подгруппе T_1. В силу максимальности это означает, что T_1 и T_2 — сопряжены. ■

Определение 3. Пусть G — группа, H — ее подгруппа. *Централизатором* $Z(H) \subset G$ подгруппы H в G будем называть подгруппу, состоящую из элементов G, коммутирующих со всеми элементами H. *Нормализатором* $Norm(H) \subset G$ подгруппы H в G будем называть подгруппу, состоящую из элементов G, сопряжение которыми переводит подгруппу H в себя.

Упражнение 5. Докажите, что $Z(H)$ и $Norm(H)$ действительно являются подгруппами, причем $Z(H) \subset Norm(H)$. Докажите, что централизатор и нормализатор подгруппы Ли являются подгруппами Ли.

Теорема 3. *Централизатор максимального тора связной компактной группы Ли совпадает с самим максимальным тором.*

Доказательство. Пусть T — максимальный тор. Ясно, что централизатор $Z(T)$ содержит T в качестве связной компоненты. Пусть γ — элемент $Z(T)$, не принадлежащий T. Тогда, так как связных компонент компактной группы — конечное число, найдется такое n, что $\gamma^n \in T$. Выберем такой z в касательном пространстве к T, чтобы элемент $\gamma^n exp(z)$ был иррациональной образующей тора T. Тогда $\gamma exp(z/n)$ не принадлежит T, а замыкание подгруппы, порожденной этим элементам содержит $\gamma^n exp(z)$, а значит и T. Следовательно, максимальный тор, содержащий $\gamma exp(z/n)$, содержит T, но не совпадает с ним. А это противоречит максимальности T. ■

Следствие 2. *Центр компактной группы Ли вложен в любой максимальный тор.*

Следствие 3. *Пусть T — максимальный тор связной компактной группы. Тогда группа $Norm(T)/T$ — конечна.*

Действительно, так как $Z(T) = T$, $Norm(T)/T = Norm(T)/Z(T) \subset Aut(T)$. Но группа автоморфизмов тора дискретна, поскольку она переводит рациональные обмотки в рациональные.

Задача 1. Докажите, что группа автоморфизмов тора T^N равна $SL_N(\mathbb{Z})$.

Следствие 4. *Пусть T — максимальный тор связной компактной группы. Тогда $Lie(T)$ — картановская подалгебра.*

Следствие 5. *Всякая максимальная коммутативная подалгебра компактной алгебры Ли является ее картановской подалгеброй.*

Упражнение 6. Приведите пример максимальной коммутативной подалгебры SL_n, не являющейся картановской подалгеброй.

Пример 1. Диагональные матрицы из SU_n образуют максимальный тор SU_n.

Упражнение 7. Найдите максимальный тор SO_n.