ЛЕКЦИЯ 6

Напомню структуру полупростой алгебры Ли. Она определяется системой корней $R \subset \mathfrak{h}^*$ и допускает разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} u_\alpha .$$

При этом $\mathfrak{h}$ — коммутативная подалгебра, $[h, u_\alpha] = \alpha(h) u_\alpha$ при $h \in \mathfrak{h}$ и

$$[u_\alpha, u_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} u_{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in R \\ \check{\alpha} & \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Выберем подмножество положительных корней $R_+ \subset R$ и набор простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_+$. Тогда элементы $h_i = \check{\alpha}_i$, $e_i = u_{\alpha_i}$, $f_i = u_{-\alpha_i}$ будут образующими алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Введем также обозначения $e_\alpha = u_\alpha$ и $f_\alpha = u_{-\alpha}$ для $\alpha \in R_+$.

Предложение 1. *Всякое неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{g}$ имеет базис из общих собственных векторов h_i.*

Доказательство. Действительно, набор коммутирующих операторов имеет общйи собственный вектор. Поэтому достаточно доказать, что пространство, натянутое на общие собственные векторы — подпредставление. И в самом деле, если v_μ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ — общий собственный вектор, то

$$h_i u_\alpha v_\mu = u_\alpha h_i v_\mu + [h_i, u_\alpha] v_\mu = (\mu + \alpha) u_\alpha v_\mu .$$

■

Собственные значения общих собственных векторов задаются элементами $\mathfrak{h}^*$. Будем называть их *весами* представления. Мы уже проверили, что действие элемента u_α прибавляет к весу α. Выведем условие целочисленности весов.

Предложение 2. *Собственные значения действия h_i на конечномерных представлениях — целые числа.*

Действительно, h_i, e_i, f_i составляют подалгебру, изоморфную sl_2, а собственные значения действия картановского элемента sl_2 на конечномерных представлениях — целые числа. Будем дальше называть такие веса *целыми*.

Пусть теперь $\varphi \in \mathfrak{h}$ — функционал на пространстве весов, нулевые значения которого отделяют положительные корни (на которых значение φ положительно) от отрицательных. Будем предполагать φ достаточно общим, чтобы значения φ на целых весах различальсь. Вес представления, значение φ на котором максимально, будем называть *старшим*. Для него, помимо условия целочисленности, есть еще следующее условие *доминантности*.

Предложение 3. *Пусть λ — старший вес конечномерного представления $\mathfrak{g}$. Тогда $\lambda(h_i) \geq 0$.*

Доказательство. Пусть v — вектор старшего веса. Тогда $e_i v = 0$. Значит, v — вектор старшего веса и для подалгебры, порожденной h_i, e_i, f_i. Но положительность действия картановского элемента sl_2 на нем нам известна. ■

Пример 1. Будем обозначать вес вектором–строкой, i–тая компонента которого равна значению на h_i. Пусть V — тавтологическое представление алгебры Ли sl_n. Тогда его старший вес равен $(1, 0, \ldots, 0)$. Старший вес представления $\wedge^k V$ равен $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица стоит на k–том месте. А старший вес приводимого представления $V^{\otimes r_1} \otimes \left(\wedge^2 V\right)^{\otimes r_2} \otimes \ldots \left(\wedge^{n-1} V\right)^{\otimes r_{n-1}}$ равен $(r_1, \ldots, r_{n-1})$. Таким образом, существует представление с данным целым доминантным старшим весом.

Задача 1. Найдите старший вес тавтологического и присоединенного представления алгебр Ли so_n и sp_n.

Определение 1. Решетка в $\mathfrak{h}^*$, элементы которой действуют на h_i целыми числами, называется *решеткой весов*. Решетка в $\mathfrak{h}^*$, порожденная корнями называется *решеткой корней.*

Ясно, что решетка корней вложена в решетку весов.

Задача 2. Найдите фактор решетки весов по решетке корней для алгебр Ли sl_n, so_n и sp_n.

Теорема 1. *Неприводимое конечномерное представление с данным целым доминантным старшим весом существует и единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Для доказательства определим наибольшее представление с данным старшим весом. Чтобы мотивировать последующее определение докажем следующую лемму.

Лемма 1. *("собирательный процесс") Пусть $x_1, \dots, x_N$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{a}$, v — произвольный вектор неприводимого представления V этой алгебры. Тогда векторы $x_1^{r_1} \dots x_N^{r_N} v$ порождают представление как векторное пространство.*

Доказательство. В силу неприводимости V, оно порождено векторами вида $x_{i_1} \dots x_{i_s} v$ как векторное пространство. Число s назовем *длиной* такого вектора. Заметим, что векторы $x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \dots x_s v$ и $x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}} x_{i_k} \dots x_s v$ различаются на сумму векторов меньшей длины. Поэтому можем упорядочить все сомножители по модулю векторов меньшей длины. Индукция по длине доказывает лемму. ■

Следствие 1. *Пусть v — вектор старшего веса неприводимого представления V полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — положительные корни $\mathfrak{g}$. Тогда V порождено векторами вида $f_{\alpha_1}^{r_1} \dots f_{\alpha_N}^{r_N} v$ как векторное пространство.*

Действительно, это следует из леммы 1, примененной к базису $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_N}, h_1, \dots, h_n, e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_N}$ (именно в таком порядке).

Определение 2. *Представлением Верма M_λ* называется пространство с базисом

$$f_{\alpha_1}^{r_1} \dots f_{\alpha_N}^{r_N} v_\lambda,$$

действие $\mathfrak{g}$ на котором определяется с помощью собирательного процесса и соотношений $e_\alpha v_\lambda = 0$, $h_i v_\lambda = \lambda(h_i)$.

Упражнение 1. Докажите, что представление Верма действительно является представлением.

Предложение 4. *Всякое неприводимое представление со старшим весом λ является фактором представления Верма M_λ.*

Действительно, если v — вектор старшего веса λ, то определено сюръективное отображение из M_λ в наше представление, переводящее $f_{\alpha_1}^{r_1} \dots f_{\alpha_N}^{r_N} v_\lambda$ в $f_{\alpha_1}^{r_1} \dots f_{\alpha_N}^{r_N} v$.

Упражнение 2. Докажите, что представление Верма не зависит от способа упорядочивания.

Предложение 5. *Всякий нетривиальный фактор представления Верма M_λ имеет старший вес λ.*

Действительно, так как M_λ порождено вектором v_λ, образ v_λ в любом нетривиальном факторе не равен нулю. Он и будет вектором старшего веса.

Лемма 2. *Существует ровно один нетривиальный неприводимый фактор представления Верма.*

Доказательство. Будем называть подпредставление *собственным*, если оно не совпадает со всем представлением.

Докажем равносильное утверждение, а именно, что существует и единственно максимальное (по вложению) собственное подпредставление.

Заметим, что всякое подпредставление является подпредставлением и относительно картановской подалгебры, поэтому оно разлагается в прямую сумму весовых подпространств. При этом, так как представление Верма M_λ порождено вектором старшего веса v_λ, подпредставление является собственным тогда и только тогда, когда оно не содержит вектора веса λ. Ясно, что это свойство сохраняется при взятии суммы подпредставлений, поэтому максимальным собственным подпредставлением будет сумма всех собственных подпредставлений и только она. ■

И так, искомое неприводимое представление V_λ будет фактором M_λ по максимальному собственному подпредставлению. Таким образом, мы построили неприводимое представление с данным старшим весом и доказали, что оно единственно с точностью до изоморфизма. Осталось доказать, что если старший вес целый и доминантный, то представление V_λ конечномерно.

Лемма 3. *Пусть вес λ целый и доминантный. Тогда подпредставление $S_\lambda \subset M_\lambda$, порожденное векторами $u_i = (f_i)^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda$, — собственное.*

Доказательство. Так как S_λ является суммой подпредставлений, порожденных u_i, нам достаточно доказать, что каждое из этих подпредставлений — собственное.

Так как элементы e_i, h_i, f_i образуют подалгебру, изоморфную sl_2, мы знаем, что $e_i u_i = 0$. Кроме того, так как e_j коммутирует с f_i при $i \neq j$, имеем $e_j u_i = 0$. Тогда, так как все e_α выражаются через коммутаторы e_j, имеем $e_\alpha u_i = 0$.

Значит, применяя лемму 1, получим, что все веса рассматриваемого подпредставления не старше веса u_i, и вектор v_λ в нем не содержится. ■

Доказательство того, что M_λ / S_λ — конечномерно будет произведено на следующей лекции. Так как неприводимое представление является фактором M_λ по подпредставлению, содержащему S_λ, это докажет теорему.