ЛЕКЦИЯ 7

На прошлой лекции мы построили неприводимое представление с заданным старшим весом и доказали, что оно единственно с точностью до изоморфизма. Также было доказано, что для конечномерности необходимо чтобы старший вес был целым и доминантным. Сегодня мы докажем достаточность этого условия, и, тем самым, завершим доказательство основной теоремы прошлой лекции.

Пусть вес λ — целый и доминантный. На прошлой лекции мы определили собственное подпредставление S_λ представления Верма M_λ. Сейчас мы докажем, что факторпредставление M_λ/S_λ конечномерно, а значит конечномерно и соответствующее неприводимое представление V_λ. На самом деле, $V_\lambda \cong M_\lambda/S_\lambda$.

Теорема 1. *Представление M_λ/S_λ конечномерно.*

Доказательство. Доказательство основано на наборе лемм.

Лемма 1. *Кратность любого веса представления Верма M_λ конечна.*

Доказательство. Ясно, что кратность веса равна количеству базисных векторов $(f^{r_1}_{\alpha^{(1)}} \dots f^{r_N}_{\alpha^{(N)}})(v_\lambda)$ с данным весом.

Пусть, как и ранее, функционал φ разделяет положительные и отрицательные корни. Заметим, что так как $\varphi(\alpha^{(i)}) > 0$, для всякого числа M существует лишь конечное множество наборов неотрицательных целых чисел r_i, таких что $\varphi(\lambda - r_1\alpha^{(1)} - \dots - r_N\alpha^{(N)}) \geq M$. Выбирая в качестве M значение φ на заданном весе, получим требуемое утверждение. ■

Значит, кратности весов M_λ/S_λ конечны и достаточно доказать конечность множества весов.

Лемма 2. *Элемент f_i действует нильпотентно на любой вектор M_λ/S_λ.*

Доказательство. Мы знаем, что f_i действует нильпотентно на v_λ и что $ad\, f_i$ действует нильпотентно на все f_α (то есть $(ad\, f_i)^{\varepsilon_i(\alpha)} f_\alpha = 0$ для некоторых чисел $\varepsilon_i(\alpha)$). Пусть f_i действует нильпотентно на некоторый вектор v. Значит, для некоторого N выполнено $f_i^N v = 0$. Отсюда следует, что $f_i^{N+\varepsilon_i(\alpha)} f_\alpha v = 0$. А так как наше представление порождено вектором v_λ при действии элементов f_α, элементы f_i действуют нильпотентно на любой вектор. ■

Как уже обсуждалось, элементы e_i, h_i, f_i образуют подалгебру $(sl_2)^i \subset \mathfrak{g}$, изоморфную sl_2.

Следствие 1. *Любой вектор M_λ/S_λ лежит в конечномерном подпредставлении алгебры $(sl_2)^i$.*

Лемма 3. *Пусть μ — вес M_λ/S_λ. Тогда $\mu - h_i(\mu)\alpha_i$ тоже является весом M_λ/S_λ.*

Доказательство. Пусть v — вектор веса μ, тогда $h_i v = h_i(\mu)v$. Рассмотрим v как вектор конечномерного представления $(sl_2)^i$. Мы знаем, что если $h_i(\mu) > 0$ то $f_i^{h_i(\mu)} v \neq 0$, а если $h_i(\mu) < 0$, то $e_i^{-h_i(\mu)} v \neq 0$, что и есть вектор требуемого веса. ■

Следствие 2. *Группа Вейля W алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действует на множестве весов M_λ/S_λ.*

Действительно, преобразование $\mu \mapsto \mu - h_i(\mu)\alpha_i = \mu - \frac{2(\alpha_i,\mu)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$, является отражением относительно α_i, а группа Вейля ими порождена.

Определение 1. Множество доминантных весов называется *камерой Вейля.*

Эта терминология мотивирована следующим утверждением.

Предложение 1. *Любой вес можно перевести действием группы Вейля в доминантный.*

Доказательство. Камера Вейля D ограничена гиперплоскостями H_i, относительно которых производятся отражения, соответствующие простым корням.

Пусть $w_1, \dots, w_N$ — все элементы W. Тогда фигура $w_1 D \cup \dots \cup w_N D$ может быть ограничена только образами стенок камеры Вейля относительно действия W. Но отражения относительно этих гиперплоскостей также входят в группу Вейля. ■

Верно и более сильное утверждение о том, что камера Вейля является фундаментальной областью действия группы Вейля.

Лемма 4. *Пересечение выпуклой оболочки множества весов представления Верма с камерой Вейля является ограниченной фигурой.*

Доказательство. Выпуклая оболочка множества весов представления Верма является многогранным углом $B^\lambda = \{\lambda - \sum x_i\alpha_i | \; x_i \geq 0\}$. Докажем, что сдвинутая фигура $B = \{-\sum x_i\alpha_i | \; x_i \geq 0\}$ и камера Вейля D пересекаются только по нулю.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор, такой что $\sum x_i\alpha_i \in D$; пусть A — матрица Картана $\mathfrak{g}$. Тогда, из определения доминантности следует, что все координаты вектора $A\mathbf{x}$ неотрицательны. Если при этом $\mathbf{x} \in B$, то есть $x_i \leq 0$, то выполнено $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$. Значит, из положительной определенности A следует, что на самом деле $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{x} = 0$.

Заметим теперь, что фигуры B и D — выпуклы, значит, так как они пересекаются только по нулю, существует гиперплоскость H, их разделяющая. Таким образом, пересечение исходных фигур лежит в симплексе, ограниченном исходным многогранным углом B^λ и гиперплоскостью H. ■

Завершим доказательство теоремы. Выпуклая оболочка множества весов M_λ/S_λ инвариантна относительно группы Вейля, поэтому, в силу предложения 1, она является объединением $w(B^\lambda \cap D)$ по всем элементам $w \in W$. Значит, она является ограниченной фигурой, и, в частности, содержит лишь конечное число целых точек. Таким образом, множество весов M_λ/S_λ конечно, и соответствующее представление конечномерно ■

Следствие 3. *Группа Вейля действует на множестве весов конечномерного представления.*

Действительно, ясно, что аналог леммы 3 выполнен для конечномерного представления.

Упражнение 1. Какие многоугольники могут образовывать выпуклые оболочки множества весов конечномерных представлений простых алгебр Ли ранга 2?

Задача 1. Какие многогранники могут образовывать выпуклые оболочки множества весов конечномерных представлений простых алгебр Ли ранга 3?