# ЛЕКЦИЯ 8

Мы классифицировали неприводимые представления полупростых алгебр Ли. Теперь перейдем к соответствующим компактным группам.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ — ее вещественная форма (как мы увидим, комплексные представления не будут зависеть от выбора вещественной формы), $G_0$ — соответствующая $\mathfrak{g}_R R$ односвязная группа и $G_{ad} = G_0/Z(G_0)$ — присоединенная группа. Мы знаем, что $G_{ad}$ компактна и хотим доказать, что компактна и группа $G_0$. Это равносильно тому, что группа $Z(G_0) \cong \pi_1(G_{ad})$ конечна.

Пусть $T_{ad}$ — максимальный тор $G_{ad}$, $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ — касательное подпространство к $T_{ad}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \in \mathfrak{g}$ — соответствующая картановская подалгебра.

**Предложение 1.** *Подпространство $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ является вещественной линейной оболочкой набора элементов $ih_1, \ldots, ih_n \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.*

**Доказательство.** Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ — базис из рациональных направлений $T_{ad}$. Нормируем эти векторы так, чтобы $exp(\nu_k) = 1$ (это возможно, так как $exp(t\nu_k) = 1$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$).

Пусть $\nu_k = \sum_j z_{kj} h_j$, где $z_{kj}$ — комплексные числа. Мы хотом доказать, что эти числа — чисто мнимые. Для этого подействуем элементом $exp(\nu_k)$ на присоединенное представление, получим $exp(\sum_j z_{kj} h_j(\alpha_l)) = 1$ для всех $l$. Это означает, что $\sum_j z_{kj} h_j(\alpha_l) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, в частности, эти числа являются чисто мнимыми. Но мы знаем, что числа $h_j(\alpha_l)$ образуют невырожденную вещественную матрицу, а значит, коэффициенты $z_{kj}$ с необходимостью сами являются чисто мнимыми числами. ■

Для каждой решетки $L$ в пространстве $\mathfrak{h}^*$ определим двойственную решетку в пространстве $\mathfrak{h}$ так:

$$L^\vee = \{h \in \mathfrak{h} | h(x) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } x \in L\}.$$

Пусть $Q$ — решетка корней $\mathfrak{g}$.

**Упражнение 1.** Докажите, что

$$Q^\vee = \{h \in \mathfrak{h} | h(\alpha_i) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } i\}.$$

**Упражнение 2.** Пусть $L_1 \subset L_2$ — две решетки. Тогда абелевы группы $L_1/L_2$ и $L_2^\vee/L_1^\vee$ (неканонически) изоморфны.

**Предложение 2.** *Отображение $exp$ отождествляет $\mathfrak{h}_\mathbb{R}/2\pi i Q^\vee$ с $T_{ad}$.*

Действительно, для $h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ имеет место $exp(h) = 1$ в том и только том случае, если $exp(h)$ действует тождественно на присоединенном представлении. А это равносильно $h \in 2\pi i Q^\vee$.

Верно и более общее утверждение.

**Предложение 3.** *Пусть $G$ — компактная группа, $X$ — решетка, порожденная весами представлений $G$. Тогда отображение $exp$ отождествляет $\mathfrak{h}_\mathbb{R}/2\pi i X^\vee$ с максимальным тором $T$ группы $G$*

**Доказательство.** Действительно, экспоненциальное отображение отождествляет максимальный тор и фактор $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ по некоторой решетке. Чтобы вычислить эту решетку достаточно вспомнить, что у компактной группы существует точное конечномерное представление, а значит, экспонента от элемента $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ равна единице тогда и только тогда, когда она действует тождественно на любом конечномерном представлении, в частности, на любом его весовом векторе. А это и утверждается в предложении. ■

Заметим, кстати, что так как веса неприводимого представления отличаются от старшего на элементы решетки $Q$, решетка $X$ порождена старшими векторами неприводимых представлений.

Пусть теперь $G$ — компактная группа, $P$ —решетка весов $\mathfrak{g}$.

**Предложение 4.** *Степень накрытия $G : G_{ad}$ не превышает порядка группы $P/Q$.*

**Доказательство.** Ясно, что $G = G_0/Z$, где $Z \subset Z(G_0)$ — подгруппа конечного индекса. Пусть $T$ — максимальный тор $G$. Тогда $Z(G_0)/Z \subset T$ как элементы центра $G$, и $T/(Z(G_0)/Z)$ является максимальным тором $G_{ad} = G/(Z(G_0)/Z)$. Таким образом, достаточно получить неравенство на степень накрытия максимальных торов.

Мы знаем, что экспоненциальное отображение отождествляет $T_{ad}$ и $\mathfrak{h}_\mathbb{R}/2\pi i Q^\vee$, а также $T$ и $\mathfrak{h}_\mathbb{R}/2\pi i X^\vee$, где $X$ содержится в решетке $P$. Значит, степень накрытия равна порядку группы $Q^\vee/X^\vee$, которая, в свою очередь, является фактором $Q^\vee/P^\vee$, и предложение следует из упражнения 2. ■

**Теорема 1.** *Односвязная группа $G_0$ является компактной.*

**Доказательство.** Как уже обсуждалось, достаточно доказать конечность группы $Z(G_0) \cong \pi_1(G_{ad})$. Предположим, что эта группа бесконечна.

**Упражнение 3.** Докажите, что любая бесконечная абелева группа имеет конечный фактор сколь угодно большого порядка.

Но по каждому фактору $Z(G_0)/Z$ конечного порядка строится компактная группа $G = G_0/Z$, такая что степень накрытия $G : G_{ad}$ равна порядку этого фактора. Таким образом, приходим к противоречию с предложением 4. ■

**Следствие 1.** *Всякая группа с компактной полупростой алгеброй Ли компактна.*

**Следствие 2.** *Конечномерные представления полупростой алгебры Ли вполне приводимы и унитаризуемы.*

**Следствие 3.** *Группа $Z(G_0) \cong \pi_1(G_{ad})$ изоморфна группе $P/Q$.*

Теперь классифицируем все компактные группы с данной полупростой компактной алгеброй Ли, а также их неприводимые представления.

**Предложение 5.** *Всякая нормальная дискретная подгруппа связной группы Ли вложена в центр.*

**Доказательство.** Пусть $N$ — нормальная дискретная подгруппа связной группы Ли $G$. Тогда для всех $x \in N$, $g \in G$ имеет место $gxg^{-1} \in N$. Для $g = 1$ при этом $gxg^{-1} = x$, значит, в силу дискретности $N$ и связности $G$, это выполнено для всех $g$, то есть, $x \in Z(G)$. ■

**Следствие 4.** *Всякая группа с данной полупростой компактной алгеброй Ли накрывает присоединенную группу.*

**Следствие 5.** *Фундаментальная группа группы Ли абелева.*

**Упражнение 4.** Фундаментальная группа любой топологической группы — абелева.

**Указание:** Поточечное произведение петель задает отображение тора $T^2$ в рассматриваемую группу.

Подведем итог.

**Теорема 2.**

(i) *Имеется взаимно-однозначное соответствие между компактными полупростыми группами Ли с данной алгеброй Ли и решетками $P \supset X \supset Q$.*

(ii) *Фундаментальная группа группы Ли, соответствующей решетке $X$, изоморфна $P/X$.*

(iii) *Центр группы Ли, соответствующей решетке $X$, изоморфен $X/Q$.*

(iv) *Неприводимые представления группы Ли, соответствующей решетке $X$, суть представления со страшим весом, принадлежащим $X$.*

Теперь опишем группу Вейля в терминах геометрии компактных групп.

**Теорема 3.** *Пусть $T$ — максимальный тор компактной группы. Тогда группа $Norm(T)/T$ изоморфна группе Вейля $W$ соответствующей алгебры Ли.*

**Доказательство.** Ясно, что группа $Norm(T)/T$ действует на максимальный тор $T$ сопряжением. При этом, так как централизатор $Z(T)$ совпадает с $T$, всякий элемент $Norm(T)/T$, отличный от единицы, действует нетривиально. Убедимся, что действие $Norm(T)/T$ на касательное пространство к $T$ совпадает с действием группы Вейля на картановской подалгебре.

**Лемма 1.** *Элемент $r_i = exp(f_i) \cdot exp(-e_i) \cdot exp(f_i)$ принадлежит $Norm(T)$ и действует на картановскую подалгебру как простое отражение, соответствующее корню $\alpha_i$*

**Доказательство.** Чтобы доказать, что $r_i \in Norm(T)$ достаточно убедиться, что действие $r_i$ сохраняет картановскую подалгебру. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $h \in \mathfrak{h}$ и $\alpha_i(h) = 0$. Тогда ясно, что $r_i h r_i^{-1} = h$.

2) Пусть теперь $h = h_i$. В этом случае вычисление сводится к случаю $sl_2$:

**Упражнение 5.** Докажите, что $r_i h_i r_i^{-1} = -h_i$.

Значит, в силу линейности, действие $r_i$ сохраняет картановскую подалгебру и действует на ней как простое отражение. ■

Таким образом, $W \subset Norm(T)/T$.

**Лемма 2.** *Группа $Norm(T)/T$ действует на множестве весов любого представления группы $G$.*

**Доказательство.** Действительно, группа $Norm(T)$ действует на любом представлении $G$, а подгруппа $T \subset Norm(T)$ сохраняет вес. ■

Предположим теперь, что $Norm(T)/T$ больше группы Вейля. Тогда, так как с помощью группы Вейля можно перевести любой вес в доминантный, найдется доминантный вес $\lambda$ и элемент $x \in Norm(T)/T$, такой что $x(\lambda) \neq \lambda$ — тоже доминантный. Ясно, что можно при этом выбрать $\lambda$ рациональным, а следовательно, умножая на соответствующую константу, целым. В этом случае, по лемме 2, $x(\lambda)$ будет весом представления со старшим весом $\lambda$, а значит $x(\lambda)$ — целый вес, младший $\lambda$. Но по лемме 2 получается, что вес $\lambda = x^{-1}(x(\lambda))$ имеется в представлении со старшим весом $x(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

**Пример 1.** Пусть $G = SU_n$. В качестве максимального тора выберем подгруппу диагональных матриц. Тогда нормализатор тора состоит из матриц $(a_{ij})$, у которых есть ровно $n$ ненулевых элементов. В силу невырожденности это означает, что найдется перестановка $\sigma \in S_n$, такая что ненулевыми элементами будут $a_{i\sigma(i)}$. Отсюда видно, что $Norm(T)/T$ изоморфен $S_n$.

**Задача 1.** Опишите нормализатор тора в группе $O_n$.