ЛЕКЦИЯ 9

Пусть G — компактная группа Ли, V — её конечномерное представление. Рассмотрим его характер $\chi_V : G \to \mathbb{C}$, определенный по правилу $\chi_V(g) = \mathrm{tr}_V g$. Напомню, что справедливы следующие свойства характеров:

1) *Центральность*: $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$.

2) *Ортогональность*: если V_1, V_2 — неприводимые представления, то

$$\int\limits_{g\in G} \chi_{V_1}(g)\overline{\chi_{V_2}(g)}d\mu_G = \begin{cases} 1, & V_1 \simeq V_2; \\ 0, & V_1 \not\simeq V_2. \end{cases}$$

Выберем максимальный тор $T \subset G$. Тогда, так как всякий элемент группы сопряжен элементу максимального тора, ограничение $\chi_V|_T$ полностью определяет характер χ_V.

Т.к. V конечномерно, в нём можно выбрать базис $v_1, \ldots v_N$ из векторов, собственных для действия T. Рассмотрим картановскую подалгебру $Lie\,T = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ и её комплексификацию $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Тогда для векторов v_i и элементов $h \in \mathfrak{h}$ это означает, что $hv_i = \lambda_i(h)v_i$. А для элемента $\exp(h) \in T$ выполнено $\exp(h)v_i = \exp(\lambda_i(h))v_i$.

Пусть группа G задана решеткой $X \in \mathfrak{h}^*$ (см. теорему 2 лекции 7). Тогда, чтобы максимальный тор мог действовать на весах, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_i \in 2\pi i X$ для всех i. А именно, если $\lambda \in 2\pi i X$ — вес V, то определена функция на торе $\exp(\lambda)$ по правилу $\exp(\lambda)(\exp(h)) = \exp\lambda(h)$.

Рассмотрим представление V группы G и его набор весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, заданных с кратностями $n_1, \ldots, n_m$. Тогда $\chi_V|_T = \sum n_i \exp(\lambda_i)$. Тем самым, ограничение характера на максимальный тор несет информацию о весах представления и их кратностях.

Мы уже обсуждали, что ограничение характера на максимальный тор определяет характер. Значит, можно переписать усреднение центральных функций по группе в терминах их ограничений на максимальный тор. В частности, в этих терминах перепишется скалярное произведение центральных функций.

Теорема 1. *Пусть $\varphi : G \to \mathbb{C}$ — центральная функция. Тогда*

$$\int\limits_{g\in G} \varphi(g)d\mu_G = \int\limits_{t\in T} \varphi(t)u(t)d\mu_T,$$

где $u(t) = \frac{\delta\overline{\delta}}{|W|}$, $\delta = \prod\limits_{\alpha\in R_+}(\exp(\frac{\alpha}{2}) - \exp(-\frac{\alpha}{2}))$

Доказательство. Чтобы уравнять размерность двух многообразий, по которым ведется интегрирование, введем вспомогательное многообразие.

Предложение 1. *Пусть G — группа Ли, H — её подгруппа. Тогда на множестве смежных классов G/H можно ввести структуру гладкого многообразия.*

Определение 1. Пусть G — компактная группа Ли, T — ее максимальный тор. Тогда многообразие G/T называется *обобщённым многообразием флагов*.

Упражнение 1. Докажите, что обобщенное многообразие флагов для группы SU_n есть многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$.

Определим отображение $f : G/T \times T \to G$ формулой $f(g,t) = gtg^{-1}$.

Лемма 1. *Степень отображения f равна $|W|$.*

Доказательство. Группа Вейля $W = Norm\,T/T$ действует на $G/T \times T \to G$ следующим образом. $Norm\,T/T$ действует справа на G/T, $g \mapsto gw$. Значит, действие W можно определить так: $x = (g,t) \mapsto (gw, w^{-1}tw)$. При этом ясно, что $f(x) = f(wx)$.

На первый взгляд может показаться, что у каждого элемента G будет $|W|$ прообразов в $G/T \times T$. Но оказывается, что это верно не всегда.

Определение 2. Элемент $g \in G$ называется *регулярным*, если он принадлежит ровно одному максимальному тору.

Если $t \in T'$ — регулярный элемент, то его прообразы имеют вид вида (h, hth^{-1}), где h — элемент G, сопрягающий T' в T. Элемент h определен с точностью до нормализатора тора, значит, образ h в G/T определён с точностью до $Norm\,T/T \cong W$. Таким образом, число прообразов регулярного элемента равно $|Norm\,T/T| = |W|$.

Итак, тот факт, что степень f равна $|W|$, будет вытекать из следующего утверждения.

Предложение 2. *Дополнение к регулярным элементам имеет коразмерность больше единицы.*

Действительно, элемент не является регулярным, если размерность его централизатора больше, чем размерность максимального тора. Такие элементы имеют ненулевую коразмерность в максимальном торе, и, кроме того, размерность их стабилизатора при действии группы сопряжением больше, чем размерность стабилизатора регулярного элемента. ■

Задача 1. Докажите, что дополнение к регулярным элементам имеет коразмерность 3.

Упражнение 2. Докажите, что критическими значениями функции f являются нерегулярные элементы и только они.

Отображение $G/T \times T_R \to G_R$ во множество регулярных элементов G_R — это связное накрытие степени $|W|$. Тогда

$$\int\limits_G \varphi(g) d\mu_G = \frac{1}{|W|} \int\limits_{G/T\times T} f^*(\varphi(t) d\mu_T),$$

где $f^*(\varphi d\mu_T)$ — индуцированная на $G/T \times T$ функция. Поскольку φ — функция классов, φ^* постоянна вдоль G/T. Нам остается вычислить индуцированную форму $f^*(d\mu_T)$ и применить теорему Фубини.

Ясно, что $T(G/T \times T) = T(G/T) \times T(T)$, при этом, так как $T(G) = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, имеет место канонический изоморфизм $T(G/T) \simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Представим $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ как прямую сумму картановской подалгебры и суммы корневых подпространств: $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$, где $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap \oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$. Теперь мы можем отождествить $T(G/T)$ с $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ и, тем самым, $T(G/T \times T)$ с $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cong T(G)$.

На $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ определены формы старшей степени, задающие формы $d\mu_G$ и $d\mu_T$ на соответствующих группах. Определим форму старшей степени $d\mu_{G/T}$ на G/T так, чтобы $d\mu_T \wedge d\mu_{G/T} = d\mu_G$ на $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $\int\limits_{G/T} d\mu_{G/T} = 1.$

Доказательство. Рассмотрим естественную проекцию $p : G \to G/T$ со слоем T. Утверждение леммы следует из того, что форму $d\mu_G$ можно интегрировать сначала по слоям p, а затем по G/T. ■

И так, $f^*(d\mu_G) = (\det f')\ d\mu_{G/T} \wedge d\mu_T$, где производная $f' : T(G/T \times T) \to T(G)$ рассматривается как отображение $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Вычислим ее определитель в произвольной точке.

Лемма 3. *Функция* $\det f'$ *не зависит от аргумента из* G/T *и совпадает с* $\delta\overline{\delta}$ *как функция на* T.

Доказательство. Возьмём какой-нибудь элемент $u \in T$ из окрестности единицы. Тогда

$$f(g, tu) = gtug^{-1} = gtg^{-1}gug^{-1} = gtg^{-1}(Adg)u.$$

Следовательно, $f'|_T = Ad\,g$.

Теперь пусть $v = \exp(s\xi)$, где $s \in \mathbb{R}$, а $\xi \in \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} f(gv, t) = g\xi tg^{-1} - gt\xi g^{-1} = gtg^{-1}(Ad(gt^{-1}) - Ad(g))\xi = gtg^{-1}Ad(g)(Ad(t^{-1}) - E)\xi.$$

И так, $f' = Ad(g) \circ \begin{cases} E & \text{на } \mathfrak{h}, \\ Ad\left(t^{-1}\right) - E & \text{на } \mathfrak{g}'. \end{cases}$

Поскольку определитель $Ad(g)$ тождественно равен единице, определитель f' не зависит от g. Продолжим вычисление, по ходу дела комплексифицируя оператор f'.

$$\det{}_{\mathfrak{g}} f' = \det{}_{\mathfrak{g}'} \left(Ad(t^{-1}) - E\right) = \prod_{\alpha\in R} \det{}_{\mathfrak{g}_\alpha}(Ad(t^{-1}) - E) = \prod_{\alpha\in R} \exp(-\alpha) - E$$

Приведем этот ответ к требуемому виду.

$$\det{}_{\mathfrak{g}} f' = \prod_{\alpha\in R^+} (\exp(-\alpha) - E)(\exp(\alpha) - E) = \prod_{\alpha\in R^+} \left(\exp(-\alpha/2) - \exp(\alpha/2)\right)\left(\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)\right) = \delta(t)\overline{\delta}(t).$$

Последнее равенство основано на том, что для вещественного веса λ выполнено равенство $\exp(-\lambda) = \overline{\exp(\lambda)}$. ■

И так, применяя теорему Фубини, завершим доказательство теоремы.

$$\int\limits_{g\in G} \varphi(g) d\mu_G = \frac{1}{|W|} \int\limits_{x\in G/T\times T} \varphi(f(x))\ \det\ f'(x)\ d\mu_{G/T} \wedge d\mu_T = \int\limits_{t\in T} \varphi(t) \frac{\delta(t)\overline{\delta(t)}}{|W|} d\mu_T.$$