ЭКЗАМЕН

10.05.2001 — 21.05.2001

1. Сколько существует подгрупп Ли группы SU_6 с точностью до сопряжения, изоморфных а) SO_3; б) SU_2.
Указание: вспомните название курса.

2. Рассмотрим неприводимые представления V_n алгебры Ли sl_2.
а) Докажите следующую формулу для разложения тензорной степени тавтологического представления:

$$V_1^{\otimes 2k} = \bigoplus_{i=0}^{k} \left(C_{2k}^{k+i} - C_{2k}^{k+i+1}\right) V_{2i};$$

б) Разложите на неприводимые представления $V_1^{\otimes(2k+1)}$; в) Разложите на неприводимые представления $V_2^{\otimes k}$;
г) Разложите на неприводимые представления $V_1^{\otimes k} \otimes V_2^{\otimes l}$.

3. Пусть V_λ — представление группы Ли SU_3 со старшим весом λ, таким что $\lambda(h_1) = 2$, $\lambda(h_2) = 4$. С какой кратностью V_λ входит в представление SU_3 в функциях на однородном пространстве X, если
а) $X = SU_3$; б) X — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^3$; в) X — многообразие прямых в $\mathbb{C}^3$;
г) X — многообразие векторов длины 1 в $\mathbb{C}^3$.

4. Найдите минимальную размерность нетривиального представления
а) присоединенной группы $SU_n/Z(SU_n)$; б) произвольной группы Ли с алгеброй Ли su_n.

5. Сколько неприводимых представлений может получиться в разложении тензорного произведения неприводимого представления и
а) тавтологического представления sl_3; б) присоединенного представления sl_3;
в) тавтологического представления so_5; г) тавтологического представления sl_n.