ЭКЗАМЕН

18.09.2001 — 28.09.2001

1. Сколько существует подгрупп Ли группы SU_6 с точностью до сопряжения
а) изоморфных SO_4; б) нетривиально накрываемых SO_4; в) нетривиально накрывающих SO_4.

2. Разложите следующие представления алгебры Ли sl_2 на неприводимые:
а) $S^2(V_\lambda)$ и $\wedge^2(V_\lambda)$; б) $\bigotimes^3(V_\lambda)$; в) $\wedge^3(V_\lambda)$; г) $S^3(V_\lambda)$.

3. Пусть V — 14–мерное представление группы Ли SO_5. С какой кратностью V входит в представление SO_5 в функциях на однородном пространстве наборов из а) пяти; б) четырёх; в) трех; г) двух; д) одного ортонормированных векторов в $\mathbb{R}^5$?

4. а) Докажите, что размерности представлений алгебры Ли so_5 сравнимы с 0 или ± 1 по модулю 5.
б) Докажите, что размерности представлений алгебры Ли G_2 сравнимы с 0 или ± 1 по модулю 7.
в) Докажите, что размерности представлений алгебры Ли sl_p сравнимы с 0 или ± 1 по модулю p, где p — простое число.

5. Какие неприводимые представления появляются в тензорных степенях
а) присоединенного представления sl_3?
б) четырёхмерного представления so_5? пятимерного представления so_5?
в) внешнего квадрата тавтологического представления sl_4?
г) тавтологического представления sl_n?
д) неприводимого представления sl_3 в зависимости от старшего веса?

6. Докажите, что кратности вхождения неприводимых представлений в тензорное произведение двух неприводимых представлений полупростой алгебры Ли не превышает максимальной кратности веса каждого из этих двух представлений.