СЕМИНАР 1

28.03.2001

Задачи

1. Докажите, что группа целых l–аддических чисел по сложению с топологией, индуцированной метрикой, компактна.
2. Приведите пример несвязной группы Ли, на которой нет нетривиальной инвариантной (относиительно левых и правых сдвигов) формы старшей степени.
3. Докажите, что линейные комбинации характеров конечномерных представлений плотны в подпространстве $C_c[G]$ центральных функций (функций, постоянных на классах сопряженности).
4. Вычислите характер представления V_λ алгебры Ли sl_2 как представления группы SU_2.
5. Вычислите коэффициенты Клебша–Гордона для неприводимых конечномерных представлений sl_2.
6. Найдите кратности вхождения неприводимых конечномерных представлений SO_4 в функции на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Докажите, что значение любого многочлена на сфере совпадает со значением ровно одного гармонического многочлена.
7. Изоморфны ли алгебры Ли $so_4(\mathbb{R})$ и $so_3(\mathbb{R}) \oplus so_3(\mathbb{R})$?
8. Рассмотрим кватернионное линейное пространство (левый свободный модуль над алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$) размерности n со скалярным произведением. Чтобы положительная определенность имела смысл, положим $(\lambda v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2)$, а $(v_1, \lambda v_2) = \overline{\lambda}(v_1, v_2)$, где $\lambda \in \mathbb{H}$, а сопряжение меняет знак i, j и k. Пусть H_n — группа Ли линейных преобразований кватернионного пространства, сохраняющих скалярное произведение. Докажите, что H_n компактна, а $Lie_{\mathbb{C}}(H_n) \cong sp_{2n}(\mathbb{C})$.
9. Докажите, что группа автоморфизмов тора T^N изоморфна $SL_N(\mathbb{Z})$.
10. Найдите старший вес тавтологического и присоединенного представления алгебр Ли so_n и sp_n.
11. Найдите фактор решетки весов по решетке корней для алгебр Ли sl_n, so_n и sp_n.

Основные упражнения

1. Приведите пример вложения некомпактной группы Ли в компактную.
2. Вычислите пространство инвариантных (относиительно левых и правых сдвигов) форм для тора T^N, сферы SU_2.
3. Пусть V_1, V_2 — представления G. Докажите, что $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \cong (V_1^* \otimes V_2)^G$.
4. Докажите, что представления в функциях на группе, полученные действием группы на себе левыми и правыми сдвигами, изоморфны.
5. Вычислите характер присоединенного представления группы SU_n.
6. Докажите, что линейные комбинации матричных элементов конечномерных представлений плотны в $C[G]$.
7. Докажите, что представление V_λ алгебры Ли sl_2 изоморфно $S^\lambda(V_1)$.
8. Докажите, что всякая инвариантная билинейная форма на sl_2 пропорциональна форме, заданной в базисе e, h, f матрицей $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
9. Докажите, что значение любого многочлена на окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ совпадает со значением ровно одного гармонического многочлена. Как связано это утверждение с рядами Фурье?
10. Докажите, что u_n и $sl_n(\mathbb{R})$ являются неизоморфными вещественными формами комплексной алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$.
11. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Докажите, что $Lie(Aut(\mathfrak{g})) = Der(\mathfrak{g})$, причем касательное пространство к внутренним автоморфизмам состоит из внутренних дифференцирований.
12. Докажите, что в торе T^N найдется элемент, степени которого плотны в T^N.
13. Найдите образ экспоненциального отображения для группы $SL_2(\mathbb{R})$.
14. Докажите, что всякая максимальная коммутативная подалгебра компактной алгебры Ли является касательным подпространством к некоторому максимальному тору.
15. Приведите пример максимальной коммутативной подалгебры SL_n, не являющейся картановской подалгеброй.
16. Найдите максимальный тор группы Ли SO_n.