СЕМИНАР 2
МАЙ 2001

Задачи

1. Какие многогранники могут образовывать выпуклые оболочки множества весов конечномерных представлений простых алгебр Ли ранга 3?
2. Опишите нормализатор максимального тора в группе O_n.
3. Докажите, что дополнение к регулярным элементам компактной группы имеет коразмерность 3.
4. Вычислите кратность нулевого веса неприводимых представлений алгебры Ли sl_3.
5. Докажите, что тавтологическое представление имеет наименьшую размерность среди нетривиальных представлений sl_n. Какие представления других простых алгебр Ли имеют наименьшую размерность?

Основные упражнения

1. Какие многоугольники могут образовывать выпуклые оболочки множества весов конечномерных представлений простых алгебр Ли ранга 2?
2. Пусть $L_1 \subset L_2$ — две решетки. Докажите, что абелевы группы L_1/L_2 и $L_2^\vee/L_1^\vee$ (неканонически) изоморфны.
3. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы — абелева.

   Указание: Поточечное произведение петель задает отображение тора T^2 в рассматриваемую группу.
4. Докажите, что обобщенное многообразие флагов для группы SU_n есть многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$.
5. Докажите, что критическими значениями отображения f из лекции 9 являются нерегулярные элементы и только они.
6. Приведите тождество Вейля для знаменателя в случае алгебры Ли sl_n к формуле для определителя Вандермонда.
7. Вычислите характер неприводимого представления алгебры Ли sl_3 со старшим весом λ, таким что $\lambda(h_1) =2$, $\lambda(h_2) = 3$.
8. Проверьте ответ к упражнению 7 с помошью формулы Вейля для размерности.
9. Разложите на неприводимые представления тензорный квадрат присоединенного представления sl_3. Какие из полученных представлений принадлежат симметрическому квадрату, а какие внешнему?