ГРУППА УЗЛА “ТРИЛИСТНИК”

Двумерным тором $\mathbb{T}^2$ называется фактор $\mathbb{R}^2$ по действию группы $\mathbb{Z}^2$ (параллельными переносами на векторы с целочисленными координатами). (p, q)-обмоткой тора называется образ при факторизации прямой $\ell_{p,q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid px + qy = 0\}$.

Задача 1. Докажите, что если $p/q \in \mathbb{Q}$ или равно ∞, то (p, q)-обмотка гомеоморфна окружности, а если $p/q \notin \mathbb{Q}$, то (p, q)-обмотка гомеоморфна прямой.

Тор $\mathbb{T}^2$ можно стандартным образом вложить в трехмерное пространство (положить бублик на стол). *Трилистником* называется узел (несамопересекающаяся гладкая замкнутая кривая) в $\mathbb{R}^3$, получающаяся при этом вложении из $(3, 2)$-обмотки тора.

Задача 2. Нарисуйте проекцию трилистника на плоскость.

Задача 3. Докажите, что стандартно вложенный тор разбивает $\mathbb{R}^3$ на две части, одна из которых гомеоморфна $S^1 \times D^2$, а вторая — $S^1 \times D^2$ с выкинутой точкой.

Указание (ко второму вопросу)**.** Заклейте “дырку от бублика” пленкой (гомеоморфной D^2) и попытайтесь разбить внешнюю часть полнотория на окружности так, чтобы через каждую точку пленки проходила бы ровно одна окружность. Буквально так не получится, но ...

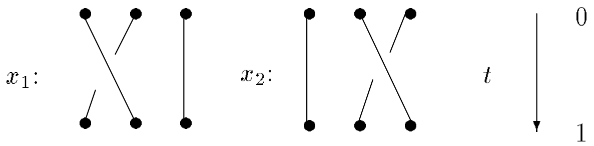
Пусть $\Sigma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 2\}$ — трехмерная сфера, $\Pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, w) \in \Sigma \mid |z| \leq |w|\}$ и $\Pi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, w) \in \Sigma \mid |w| \leq |z|\}$.

Задача 4. Докажите, что Π_1 и Π_2 гомеоморфны полноториям, а их пересечение $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — тору $\mathbb{T}^2$.

Задача 5. Докажите, что кривая $\gamma_{p,q} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z = e^{2\pi i p t}, w = e^{2\pi i q t}\} = \Sigma \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^q = w^p\}$ лежит в торе $\Pi_1 \cap \Pi_2$ и представляет собой его (p, q) — обмотку.

Обозначим $\mathcal{C}_n$ топологическое пространство, элементами которого являются неупорядоченные наборы из n попарно несовпадающих точек плоскости. Фундаментальная группа пространства $\mathcal{C}_n$ называется *группой кос из n нитей* и обозначается B_n.

Задача 6. Убедитесь, что в группе B_3 выполняется равенство $x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2$, где движения точек на плоскости, соответствующие элементам $x_1, x_2 \in B_3$, изображенны на рисунке.



Задача 7. Докажите, что группа B_n при $n \geq 3$ некоммутативна.

Указание. Перенумеруйте точки и рассмотрите действие элементов группы кос на нумерации — получится гомоморфизм B_n в группу перестановок из n элементов.

Задача 8. Докажите, что $\mathcal{C}_3$ гомеоморфно пространству кубических многочленов вида $x^3 + ux^2 + vx + w$ без кратных корней и гомотопически эквивалентно подмножеству этого пространства, выделенному условием $u = 0$ (мы будем обозначать это подмножество $\widetilde{\mathcal{C}}_3$).

Задача 9. Докажите, что $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ гомеоморфно множеству $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^3 \neq b^2\}$.

Задача 10. Докажите, что $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ гомотопически эквивалентно множеству $\Sigma \setminus \gamma_{3,2}$ (в обозначениях задачи 5).

Указание. Пару гомотопически обратных отображенгий составляют естественное вложение $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ и отображение $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \Sigma$, заданное формулой $(a, b) \mapsto (a\lambda^2, b\lambda^3)$, где $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ подбирается так, чтобы образ действительно попал в сферу Σ.

Задача 11. Докажите, используя результаты задач 3, 8, 9 и 10, что фундаментальная группа дополнения к трилистнику (в сфере S^3) изоморфна группе кос из 3 нитей.

Задача 12. Докажите, используя результат задач 3, 4 и 5 (при $p = 0, q = 1$), что фундаментальная группа дополнени к тривиальному узлу (в сфере S^3) изоморфна $\mathbb{Z}$. Выведите отсюда и из результата задачи 7, что трилистник не “развязывается” (в сфере S^3, а, следовательно, и в пространстве $\mathbb{R}^3$).