Независимый Московский Университет

Топология, II курс, IV семестр, 26 марта 2001 г.

Контрольное домашнее задание

1. Опишите фундаментальную группу а) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$; б) бутылки Клейна K; в) произвольной неориентируемой замкнутой двумерной поверхности.

2. Пусть $C \subset \mathbb{R}^3$ — вложенная замкнутая ориентированная поверхность рода g. *Отображение Гаусса* $C \to S^2$ сопоставляет точке поверхности единичный вектор нормали в этой точке (из двух возможных направлений нормали выбирается то, которое согласовано с выбранными ориентациями C и $\mathbb{R}^3$). Докажите, что степень отображения Гаусса не зависит от вложения; выразите эту степень через g.

В задачах 3 и 4 требуется определить инвариант Хопфа заданного отображения $f : S^3 \to S^2$ (т.е. кратность стандартной образующей для представленного отображением f элемента группы $\pi_3(S^2, \mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$).

3. Стандартное клеточное разбиение пространства $\mathbb{C}P^2$ состоит из трех клеток размерностей $0, 2, 4$. Отображение f — отображение приклеивания 4-мерной клетки к 2-остову,

$$f : \partial D^4 \cong S^3 \to \mathrm{sk}^2\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}P^1 \cong S^2.$$

4. Пусть $K \subset S^3$ — оснащенный узел, т.е. вложенная замкнутая кривая вместе с заданным вдоль нее полем направлений, ортогональных кривой в каждой точке. Пусть $U \subset K$ — замкнутая трубчатая окрестность кривой K. Оснащение задает выделенный гомеоморфизм $U \cong S^1 \times D^2$. Отображение f задается в U как композиция проекций

$$U = S^1 \times D^2 \to D^2 \to D^2/\partial D^2 \cong S^2,$$

а все дополнение к U отображает в отмеченную точку сферы S^2. Требуется выразить инвариант Хопфа построенного отображения $S^3 \to S^2$ через инварианты оснащенного узла. Например, чему он равен для оснащения, изображенного на рисунке?

5. Докажите, что для клеточных пространств понятия связности и линейной связности совпадают.