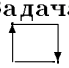
НАКРЫТИЯ

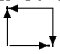
Задача 0. Закончите следующее **определение**: пусть дано конечное множество $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и конечное множество пар $E = \{(v_{i_1}, v_{j_1}), \ldots, (v_{i_N}, v_{j_N})\}$. *Конечным графом* с множеством вершин V и с множеством ребер E называется следующее топологическое пространство: …

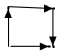
Задача 1. Докажите, что любой связный конечный граф (определенный в задаче 0) гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа?

Задача 2. Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа.

Задача 3. Используя результаты задач 9, 1 и 2, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы F_k с k образующими, и индекс $|F_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе F_p. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.

Задача 4. Лентой Мебиуса M называется квадрат, правая и левая сторона которого отождествлены так: . Постройте двулистное накрытие $s : C \to M$ ленты Мебиуса цилиндром $C = S^1 \times [0, 1]$. Докажите, что $\pi_1(M) = \pi_1(C) = \mathbb{Z}$, и опишите отображение фундаментальных групп $s_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$.

Задача 5. Проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$ называется квадрат, стороны которого попарно отождествлены так: . Постройте двулистное накрытие $c : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ и вычислите группу $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Докажите, что окрестность границы квадрата на рисунке гомеоморфна ленте Мебиуса. Что представляет собой прообраз $c^{-1}(\text{окрестности}) \subset S^2$?

Задача 6. Бутылкой Клейна K называется квадрат, стороны которого отождествлены так: . Постройте двулистное накрытие $c : \mathbb{T}^2 \to K$ и опишите подгруппу (индекса 2) $c_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$. Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$.

Пусть G — группа, а $g_1, \ldots, g_n$ — система ее образующих. Графом, связанным с $(G; g_1, \ldots, g_n)$, называется граф, вершины которого — элементы группы, и две вершины a и b соединены ребром тогда и только тогда, когда для некоторого $k = 1, \ldots, n$ выполнено равенство $b = ag_k^{\pm 1}$.

Задача 7. Постройте граф, связанный с $(G; g_1, \ldots, g_n)$, и вычислите его фундаментальную группу в случае а) $G = \mathbb{Z}, g = 1$; б) $G = S_3, g_1 = (12), g_2 = (23)$; в*) $G = S_n, g_1 = (12), g_2 = (23), \ldots, g_{n-1} = (n-1, n)$.

Задача 8. Пусть $G = F_n$ — свободная группа, $g_1, \ldots, g_n$ — ее стандартные образующие, Γ — граф, связанный с $(G; g_1, \ldots, g_n)$. а) Пусть $\Gamma_N \subset \Gamma$ — подграф, натянутый на вершины, соответствующие словам длины не более N. Докажите, что Γ_N стягиваем. б) Докажите, что граф Γ стягиваем.

Задача 9. Постройте накрытие $\Gamma \to V_n$, где Γ — граф из задачи 8, а V_n — букет n окружностей. Докажите, что $\pi_1(V_n) = F_n$.