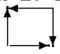
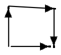
КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Задача 1. Проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$ называется квадрат, стороны которого попарно отождествлены так: . Докажите, что проективная плоскость получается отождествлением по границе двумерного диска и ленты Мебиуса (граница как диска, так и ленты Мебиуса гомеоморфна окружности).

Указание. Докажите, что окрестность границы квадрата на рисунке гомеоморфна ленте Мебиуса, а остальная часть — диску.

Задача 2. Докажите, что множество всех прямых на плоскости (не обязательно проходящих через начало координат) гомеоморфно ленте Мебиуса без границы.

Задача 3. Бутылкой Клейна K называется квадрат, стороны которого отождествлены так: . Докажите, что бутылка Клейна гомеоморфна цилиндру, основания которого заклеены двумя лентами Мебиуса.

Задача 4. n-мерным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ называется множество прямых, проходящих через начало координат, в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно сфере S^n с попарно отождествленными противоположными точками. Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфно пространству, обозначенному тем же символом в задаче 1, и придумайте аналогичное описание пространства $\mathbb{R}P^n$.

Задача 5. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ базис $e_1, \dots, e_{n+1}$, и обозначим $A_k \subset \mathbb{R}P^n$ множество прямых, лежащих в линейном пространстве $L_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle$, но не лежащих в L_k. Докажите, что множество A_k гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Что представляет собой граница множества A_k?

Задача 6. n-мерным комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ называется множество комплексных прямых, проходящих через начало координат, в линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Докажите, что пространство $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно S^2. Решите для комплексных проективных пространств аналог задачи 5.

Ручкой называется тор с дыркой. Сферой с g ручками называется результат приклеивания к сфере с g дырками g ручек по границам дырок.

Задача 7. Докажите, что правильный восьмиугольник, стороны которого попарно отождествлены через одну "без перекрутки" (т.е. отождествлены стороны с номерами 1 и 3, 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8), гомеоморфен сфере с 2 ручками.

Указание. Разрежьте восьмиугольник пополам по главной диагонали.

Задача 8. Докажите, что $4g$-угольник, стороны которого попарно отождествлены через одну "без перекрутки", гомеоморфен сфере с g ручками.

Задача 9. Докажите, что правильный шестиугольник, противоположные стороны которого отождествлены "без перекрутки", это сфера с 1 ручкой (т.е. тор).

Указание. Соедините две противоположные стороны шестиугольника полосой шириной 1.

Задача 10. Докажите, что сфера с g ручками и одной дыркой гомотопически эквивалентна букету из $2g$ окружностей.

Задача 11. Докажите, что сфера S^2 с тремя дырками, заклеенными лентой Мебиуса, гомеоморфна тору $\mathbb{T}^2$ с одной дыркой, заклеенной лентой Мебиуса, и гомеоморфна проективной плоскости с 1 ручкой.

Задача 12. Докажите, что каждое линейное преобразование $A \in \mathrm{SO}(3)$ имеет неподвижный вектор и представляет собой поворот вокруг некоторой прямой в $\mathbb{R}^3$.

Задача 13. Сопоставим преобразованию $A \in \mathrm{SO}(3)$ пару (ось вращения, угол поворота). Докажите (с использованием ответа на последний вопрос задачи 4), что тем самым определен гомеоморфизм $\mathrm{SO}(3) \to \mathbb{R}P^3$.

Задача 14. Докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфна множеству правых ортонормированных базисов в пространстве $\mathbb{R}^3$, а также множеству единичных касательных векторов к единичной сфере в $\mathbb{R}^3$.

Задача 15. Докажите, что пространство неупорядоченных наборов из n не обязательно различных комплексных чисел гомеоморфно $\mathbb{C}^n$, а пространство неупорядоченных наборов из n не обязательно различных точек $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно $\mathbb{C}P^n$.

Задача 16. Обозначим $G(4,2)$ множество всех двумерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Фиксируем в $\mathbb{R}^4$ некоторый базис $e_1, \dots, e_4$. Докажите, что следующие подмножества $G(4,2)$ гомеоморфны линейным пространствам $\mathbb{R}^k$, и найдите в каждом случае соответствующее k: а) двумерные плоскости, не содержащие прямой $\langle e_1 \rangle$, пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ только в начале координат, и не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$; б) двумерные плоскости, не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, но пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой, отличной от $\langle e_1 \rangle$; в) двумерные плоскости, пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой $\langle e_1 \rangle$, и не лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$; г) двумерные плоскости, лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой, отличной от $\langle e_1 \rangle$; д) двумерные плоскости, лежащие в пространстве $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и пересекающие плоскость $\langle e_1, e_2 \rangle$ по прямой $\langle e_1 \rangle$.

Задача 17. Как изменятся результаты задачи 16, если вместо $G(4,2)$ рассмотреть множество $G_+(4,2)$ всех ориентированных двумерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^4$? Докажите, что $G_+(4,2)$ гомеоморфно $S^2 \times S^2$.