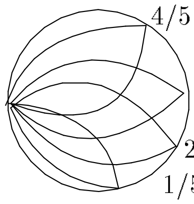
ТОЧНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ



Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — расслоение со слоем F. Отметим в E точку e, в B — точку b. Рассмотрим гомотопию $f_t : S^{n-1} \to S^n$, изображенную на рисунке. Пусть теперь $\gamma : S^n \to B$ — произвольный сфероид с отмеченной точкой b. Композиция $\tau_t = f_t \circ \gamma$ определяет гомотопию сфероидов $S^{n-1} \to B$, а которой сфероиды τ_0 и τ_1 — тождественные. По теореме о накрывающей гомотопии эту гомотопию можно поднять до гомотопии $\varphi_t : S^{n-1} \to E$, в которой сфероид φ_0 — тождественный: S^{n-1} целиком переходит в отмеченную точку e. Сфероид φ_1 не обязан быть тождественным, но должен накрывать тождественный сфероид τ_1. Иными словами φ_1 отображает всю сферу S^{n-1} в слой над отмеченной точкой b.

Задача 1. Докажите, что класс гомотопии сфероида $[\varphi_1] \in \pi_{n-1}(F)$ зависит только от класса гомотопии сфероида $[\gamma] \in \pi_n(B)$ (и не зависит от выбора конкретного сфероида γ и от выбора поднятия τ). Докажите, что соответствие $[\gamma] \mapsto [\varphi_1]$ является гомоморфизмом групп $\partial : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$.

Задача 2. Докажите, что последовательность групп и гомоморфизмов $\ldots \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B,b) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F,e) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E,e) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,e) \xrightarrow{\iota_*} \ldots$ является точной. Здесь $p : E \to B$ — проекция, $\iota : F \to E$ — тавтологическое отображение, вкладывающее F в E как слой над отмеченной точкой $b \in B$; p_*, ι_* — индуцированные гомоморфизмы гомотопических групп, ∂ — гомоморфизм из задачи 1.

Задача 3. Докажите, что гомоморфизм ∂ задачи 1 совпадает со связывающим гомоморфизмом в точной последовательности расслоения.

Задача 4. Докажите, что если расслоение $p : E \to B$ со слоем F имеет сечение $s : B \to E$, то в его точной гомотопической последовательности $\pi_{k+1}(B) \xrightarrow{\delta} \pi_k(F) \xrightarrow{\iota_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B)$ отображение p_* — эпиморфизм, отображение ι_* — мономорфизм, а связывающий гомоморфизм δ — нулевой. Выведите отсюда, что в этом случае $\pi_k(E) = \pi_k(B) \oplus \pi_k(F)$.

Указание. Определите поднятие φ_t формулой $\varphi_t = s \circ \tau_t$ (см. обозначения в начале листка)

Указание (альтернативное)**.** Рассмотрите гомоморфизм $s_* : \pi_k(B) \to \pi_k(E)$.