РАССЛОЕНИЕ ХОПФА И ЕГО ОКРЕСТНОСТИ

Задача 1. Пусть $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, а отображение $f : X \to \mathbb{C}P^2$ задано формулой $f(z, w) = [z : w]$. Докажите, что f — локально тривиальное расслоение с базой S^2, тотальным пространством S^3 и слоем S^1 (расслоение Хопфа). Докажите, что расслоение Хопфа нетривиально.

Задача 2. Разобьем тотальное пространство X расслоения Хопфа на подмножества $T_a = \{(z, w) \in X \mid |z|^2 = a, |w|^2 = 1 - a\}$ (где $0 \le a \le 1$). Докажите, что все подмножества T_a при $0 < a < 1$ — двумерные торы, которые разбиваются на слои расслоения Хопфа. Докажите, что каждый слой расслоения Хопфа представляет собой $(1, 1)$-обмотку соответствующего тора.

Задача 3. Пространство $\mathbb{R}^3$ представляет собой S^3 с выкинутой точкой. Опишите разбиение $\mathbb{R}^3$ на окружности (и одну прямую), соответствующее разбиению тотального пространства расслоения Хопфа на слои.

Задача 4. Пусть $Y = P \times Q$, где $P = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| \le 1\}$ — двумерный диск, а $Q = \{v \in \mathbb{C} \mid |v| = 1\}$ — окружность. Построим фактор-пространство X_1 пространства Y по следующему отождествлению: $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$, если $|u_1| = |u_2| = 1$, и $v_1/v_2 = u_1/u_2$. Фактор-пространство B получается из P отождествлением всех точек границы. Докажите, что отображение из $f : X_1 \to B$, заданное правилом $f(u, v) = u$, представляет собой расслоение Хопфа.

Задача 5. Вычислите точную гомотопическую последовательность расслоения Хопфа вплоть до члена π_3. Найдите группу $\pi_3(S_2)$.

Указание. Считайте известным равенство $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (образующей группы является класс гомотопии тождественного отображения). При $n = 2$, впрочем, это равенство вытекает из той же точной последовательности.

Задача 6. Пусть X_k — пространство, полученное из пространства Y задачи 4 следующим отождествлением: $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$, если $|u_1| = |u_2| = 1$, и $v_1/v_2 = (u_1/u_2)^k$. Докажите, что отображение $f_k : X_k \to B$ (где пространство B, гомеоморфное S^2, также определено в задаче 4), заданное правилом $f(u, v) = u$, представляет собой локально тривиальное расслоение.

Задача 7. Решите аналог задачи 5 для расслоения f_k из задачи 6.

Указание. При построении поднятия гомотопии-“веера” $\nu_t : S^1 \to B$ до гомотопии $\alpha_t : S^1 \to X_k$ (входящем в определение связывающего гомоморфизма), воспользуйтесь тем, что X_k получено факторизацией пространства $Y \cong D^2 \times S^1$ — постройте сначала поднятие $\beta_t : S^1 \to Y$, а затем спроектируйте его на X_k.

Задача 8. Имеет ли сечение расслоение Хопфа ? Расслоение f_k ?

Пусть $V(2, 3)$ — множество пар (e_1, e_2) ортогональных друг другу векторов единичной длины в пространстве $\mathbb{R}^3$. Отображение $\nu : V(2, 3) \to S^2$ задано формулой $\nu(e_1, e_2) = e_1$.

Задача 9. Докажите, что ν — локально тривиальное расслоение, изоморфное расслоению f_2 из задачи 6. Вычислите группы $\pi_i(V(2, 3))$ при $i = 1, 2, 3$.

Указание. Решите сначала такую вспомогательную задачу: постройте на двумерной сфере поле касательных векторов с единственным нулем.